

I. MODELUL CU FAZORI AL MAȘINII ASINCRONE

I.1. ECUAȚIILE MAȘINII ASINCRONE TRIFAZATE ÎN COORDONATELE FAZELOR

Modelarea matematică a mașinii asincrone implică scrierea ecuațiilor de funcționare în regim staționar și tranzitoriu. Pentru aceasta, se consideră uzual următoarele ipoteze simplificatoare:

- ♦ mașina se consideră perfect simetrică din punct de vedere geometric, electric și magnetic;
- ♦ se neglijează saturația miezului feromagnetic, caracteristica de magnetizare a acestuia presupunându-se liniară;
- ♦ se neglijează pierderile de magnetizare;
- ♦ se consideră că întrefierul este perfect constant (făcând abstracție de prezența dinților și a creștăturilor), iar distribuția spațială a solenațiilor și a inducției magnetice de-a lungul acestuia este sinusoidală, prin aceasta neglijându-se armonicile superioare de câmp;
- ♦ rezistențele și inductanțele înfășurărilor sunt constante în raport cu temperatura;
- ♦ parametrii rotorului sunt raportați la stator, fluxurile magnetice raportate definindu-se în funcție de inductanțele corespunzătoare și curenții raportați.

Ipotezele simplificatoare mai sus menționate, vor avea următoarele consecințe pentru modelarea matematică:

- ★ inductanțele proprii ale înfășurărilor sunt constante în raport cu curenții care circulă prin acestea;
- ★ fluxul rezultat în mașină se obține prin însumarea fluxurilor produse de înfășurările acesteia (prin neglijarea fenomenului de saturație, circuitele magnetice rezultă liniare și se poate aplica principiul superpoziției);
- ★ inductanțele mutuale dintre înfășurările statorice și rotorice variază sinusoidal în funcție de unghiul electric dintre axele magnetice ale acestora.

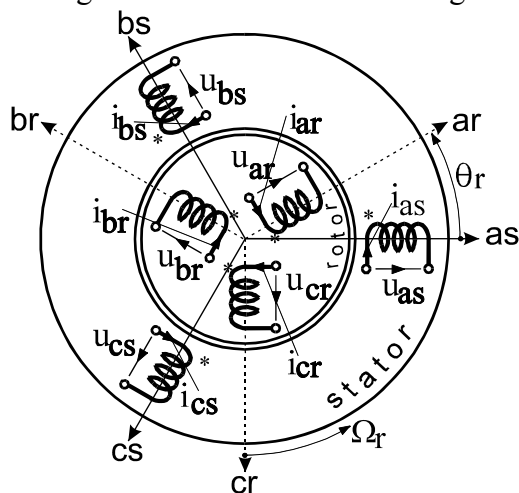


Fig. 1.1. Schema electrică a mașinii asincrone trifazate.

Cercetările și rezultatele experimentale, demonstrează că aceste ipoteze simplificatoare nu alterează semnificativ rezultatele modelării matematice.

Fără a insista asupra elementelor constructive, în figura 1.1 se prezintă schema electrică echivalentă a mașinii asincrone trifazate simetrice, cu rotor bobinat.

După cum se poate observa, axele magnetice ale înfășurărilor statorice sunt dispuse pe direcțiile $as - bs - cs$, iar axele magnetice ale înfășurărilor rotorice pe direcțiile $ar - br - cr$. Poziția relativă a rotorului față de stator este caracterizată prin unghiul θ_r , viteza unghiulară a rotorului fiind Ω_r . Dacă mașina are 2 poli, ($p=1$), $\Omega_r = \omega_r$. Aceasta înseamnă că Ω_r reprezintă în esență viteza electrică a mașinii, deoarece viteza mecanică este de p ori mai mică decât cea electrică. În cele ce urmează, se vor considera parametrii rotorului raportați la stator, dar pentru

ușurința scrierii ecuațiilor, se va renunța la indicele "prim" care pune în evidență operația de raportare.

I.1.1. Ecuațiile tensiunilor

Utilizând notațiile din figura 1.1 și ținând cont de precizările de mai sus, ecuațiile tensiunilor de fază vor avea forma:

$$\begin{cases} u_{as} = R_s i_{as} + \frac{d}{dt} \Psi_{as} \\ u_{bs} = R_s i_{bs} + \frac{d}{dt} \Psi_{bs} \\ u_{cs} = R_s i_{cs} + \frac{d}{dt} \Psi_{cs} \end{cases} \text{ pentru stator și respectiv: } \begin{cases} u_{ar} = R_r i_{ar} + \frac{d}{dt} \Psi_{ar} \\ u_{br} = R_r i_{br} + \frac{d}{dt} \Psi_{br} \\ u_{cr} = R_r i_{cr} + \frac{d}{dt} \Psi_{cr} \end{cases} \text{ pentru rotor,} \quad (1.1)$$

în care R_s , R_r reprezintă rezistențele ohmice ale înfășurărilor de fază ale statorului și respectiv rotorului, iar Ψ_{ij} ($i = a, b, c$; $j = s, r$) reprezintă fluxurile totale corespunzătoare acestor înfășurări de fază. Fluxurile totale cuprind atât fluxurile proprii (produse de curenții care circulă prin înfășurările respective), cât și fluxurile datorate curenților care circulă prin toate celelalte înfășurări statorice sau rotorice. Altfel spus, o anumită înfășurare, este supusă atât influenței câmpului magnetic produs de curentul care circulă prin ea, cât și influențelor câmpurilor magnetice produse de curenții care circulă prin celelalte înfășurări, fie statorice, fie rotorice.

1.1.2. Ecuațiile fluxurilor magnetice

Fluxurile magnetice corespunzătoare înfășurărilor de fază se vor exprima în funcție de inductanțe și de curenții care circulă prin înfășurări, ținând cont de toate cuplajele magnetice existente între acestea. Conform schemei electrice a mașinii asincrone trifazate prezentate în figura 1.1, fluxurile magnetice se pot scrie conform relațiilor de mai jos:

$$\begin{cases} \Psi_{as} = L_{asas} i_{as} + L_{asbs} i_{bs} + L_{ascs} i_{cs} + L_{asar} i_{ar} + L_{asbr} i_{br} + L_{ascr} i_{cr} \\ \Psi_{bs} = L_{bsas} i_{as} + L_{bsbs} i_{bs} + L_{bscs} i_{cs} + L_{bsar} i_{ar} + L_{bsbr} i_{br} + L_{bscr} i_{cr} \\ \Psi_{cs} = L_{csas} i_{as} + L_{csbs} i_{bs} + L_{cses} i_{cs} + L_{csar} i_{ar} + L_{csbr} i_{br} + L_{cscr} i_{cr} \end{cases} \text{ pentru stator și} \quad (1.2.)$$

$$\begin{cases} \Psi_{ar} = L_{aras} i_{as} + L_{arbs} i_{bs} + L_{arcs} i_{cs} + L_{arar} i_{ar} + L_{arbr} i_{br} + L_{arcr} i_{cr} \\ \Psi_{br} = L_{bras} i_{as} + L_{brbs} i_{bs} + L_{brcs} i_{cs} + L_{brar} i_{ar} + L_{brbr} i_{br} + L_{brcr} i_{cr} \\ \Psi_{cr} = L_{cras} i_{as} + L_{crbs} i_{bs} + L_{crce} i_{cs} + L_{crar} i_{ar} + L_{crbr} i_{br} + L_{crer} i_{cr} \end{cases} \text{ pentru rotor.} \quad (1.3)$$

În aceste ecuații:

- $L_{asas} = L_{bsbs} = L_{cses} = L_s = L_{ms} + L_{\sigma s}$ reprezintă inductanța totală a înfășurării de fază statorice, formată din inductanța utilă L_{ms} și inductanța de scăpări (de dispersie) $L_{\sigma s}$.

- $L_{arar} = L_{brbr} = L_{crer} = L_r = L_{mr} + L_{\sigma r}$ reprezintă inductanța totală a înfășurării de fază rotorice, formată din inductanța utilă L_{mr} și inductanța de scăpări $L_{\sigma r}$.

- $L_{isjs} = L_{jsis} = L_{irjr} = L_{jrjr} = L_{isjr} = L_{jsir} = L_{irjs} = L_{jrjs}$, cu $i \neq j$ și $i, j = a, b, c$, din motive de simetrie electromagnetică a mașinii.

- $L_{asbs} = L_{bscs} = L_{csas} = L_{ms} \cos(2\pi/3) = (-1/2)L_{ms}$ și $L_{ascs} = L_{bsas} = L_{csbs} = L_{ms} \cos(4\pi/3) = (-1/2)L_{ms}$ sunt inductanțele mutuale dintre înfășurările de fază statorice.

- $L_{arbr} = L_{brer} = L_{crar} = L_{mr} \cos(2\pi/3) = (-1/2)L_{mr}$ și $L_{arcr} = L_{brar} = L_{crbr} = L_{mr} \cos(4\pi/3) = (-1/2)L_{mr}$ sunt inductanțele mutuale dintre înfășurările de fază rotorice.

Inductanțele mutuale dintre o fază statorică și o fază rotorică se exprimă în funcție de inductanța mutuală maximă dintre aceste faze L_m și unghiul dintre axele magnetice ale înfășurărilor respective θ_r , determinat de poziția relativă a rotorului față de stator în corelație cu dispunerea simetrică a înfășurărilor (decalate succesiv cu $2\pi/3$ radiani). După cum am precizat, parametrii rotorului sunt raportați la stator, din care cauză inductanța utilă de magnetizare a fazei rotorice L_{mr} raportată la stator este egală cu inductanța utilă de magnetizare a fazei statorice L_{ms} și egală cu inductanța corespunzătoare fluxului magnetic principal de fază a mașinii: $L_{ms} = L_{mr} = L_m$. Aceste observații permit scrierea ecuațiilor fluxurilor sub forma următoare:

$$\begin{cases} \Psi_{as} = (L_m + L_{\sigma s}) i_{as} - \frac{1}{2} L_m i_{bs} - \frac{1}{2} L_m i_{cs} + L_m \cos \theta_r i_{ar} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) i_{br} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) i_{cr} \\ \Psi_{bs} = -\frac{1}{2} L_m i_{as} + (L_m + L_{\sigma s}) i_{bs} - \frac{1}{2} L_m i_{cs} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) i_{ar} + L_m \cos \theta_r i_{br} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) i_{cr} \\ \Psi_{cs} = -\frac{1}{2} L_m i_{as} - \frac{1}{2} L_m i_{bs} + (L_m + L_{\sigma s}) i_{cs} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) i_{ar} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) i_{br} + L_m \cos \theta_r i_{cr} \end{cases} \quad (1.4)$$

pentru stator și în mod similar pentru rotor:

$$\begin{cases} \Psi_{ar} = L_m \cos \theta_r i_{as} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) i_{bs} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) i_{cs} + (L_m + L_{\sigma r}) i_{ar} - \frac{1}{2} L_m i_{br} - \frac{1}{2} L_m i_{cr} \\ \Psi_{br} = L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) i_{as} + L_m \cos \theta_r i_{bs} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) i_{cs} - \frac{1}{2} L_m i_{ar} + (L_m + L_{\sigma r}) i_{br} - \frac{1}{2} L_m i_{cr} \\ \Psi_{cr} = L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) i_{as} + L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) i_{bs} + L_m \cos \theta_r i_{cs} - \frac{1}{2} L_m i_{ar} - \frac{1}{2} L_m i_{br} + (L_m + L_{\sigma r}) i_{cr} \end{cases} \quad (1.5)$$

Notând:

$$\begin{aligned} [\Psi_s] &= \begin{bmatrix} \Psi_{as} \\ \Psi_{bs} \\ \Psi_{cs} \end{bmatrix}; \quad [i_s] = \begin{bmatrix} i_{as} \\ i_{bs} \\ i_{cs} \end{bmatrix}; \quad [L_s] = \begin{bmatrix} L_m + L_{\sigma s} & -\frac{1}{2} L_m & -\frac{1}{2} L_m \\ -\frac{1}{2} L_m & L_m + L_{\sigma s} & -\frac{1}{2} L_m \\ -\frac{1}{2} L_m & -\frac{1}{2} L_m & L_m + L_{\sigma s} \end{bmatrix}; \\ [\Psi_r] &= \begin{bmatrix} \Psi_{ar} \\ \Psi_{br} \\ \Psi_{cr} \end{bmatrix}; \quad [i_r] = \begin{bmatrix} i_{ar} \\ i_{br} \\ i_{cr} \end{bmatrix}; \quad [L_r] = \begin{bmatrix} L_m + L_{\sigma r} & -\frac{1}{2} L_m & -\frac{1}{2} L_m \\ -\frac{1}{2} L_m & L_m + L_{\sigma r} & -\frac{1}{2} L_m \\ -\frac{1}{2} L_m & -\frac{1}{2} L_m & L_m + L_{\sigma r} \end{bmatrix}; \\ [L_{sr}(\theta_r)] &= \begin{bmatrix} L_m \cos \theta_r & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) \\ L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) & L_m \cos \theta_r & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) & L_m \cos \theta_r \end{bmatrix}; \\ [L_{rs}(\theta_r)] &= [L_{sr}(\theta_r)]^t = \begin{bmatrix} L_m \cos \theta_r & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) \\ L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & L_m \cos \theta_r & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) \\ L_m \cos \left(\theta_r + \frac{4\pi}{3} \right) & L_m \cos \left(\theta_r + \frac{2\pi}{3} \right) & L_m \cos \theta_r \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

ecuațiile fluxurilor se pot scrie sub forma:

$$[\Psi_s] = [L_s][i_s] + [L_{sr}(\theta_r)][i_r], \quad \text{pentru stator și respectiv:} \quad (1.7)$$

$$[\Psi_r] = [L_r][i_r] + [L_{rs}(\theta_r)][i_s], \quad \text{pentru rotor.} \quad (1.8)$$

Dacă se notează:

$$[u_s] = [u_{as} \ u_{bs} \ u_{cs}]^t \quad \text{și} \quad [u_r] = [u_{ar} \ u_{br} \ u_{cr}]^t \quad (1.9)$$

matricele tensiunilor corespunzătoare celor trei faze statorice, respectiv rotorice ale mașinii, prin utilizarea relațiilor (1.6) și (1.9), se pot scrie ecuațiile tensiunilor sub formă matriceală:

$$\begin{aligned} [u_s] &= R_s [i_s] + \frac{d}{dt} \{ [L_s][i_s] + [L_{sr}(\theta_r)][i_r] \}, \\ [u_r] &= R_r [i_r] + \frac{d}{dt} \{ [L_{rs}(\theta_r)][i_s] + [L_r][i_r] \}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Pentru a putea scrie mai compact ecuațiile fluxurilor pentru mașina asincronă trifazată, se formează prin combinarea matricilor corespunzătoare mărimilor celor două armături:

$$[\Psi] = [\Psi_{as} \ \Psi_{bs} \ \Psi_{cs} \ \Psi_{ar} \ \Psi_{br} \ \Psi_{cr}]^t \quad \text{și} \quad [i] = [i_{as} \ i_{bs} \ i_{cs} \ i_{ar} \ i_{br} \ i_{cr}]^t, \quad (1.11)$$

denumite matricele fluxurilor și curenților mașinii asincrone trifazate. Corespunzător, se va forma și matricea inductanțelor, utilizând matricele L_s , L_r , $L_{sr}(\theta_r)$ și $L_{rs}(\theta_r)$, conform relației:

$$[L] = \begin{bmatrix} L_m + L_{\sigma s} & -\frac{1}{2}L_m & -\frac{1}{2}L_m & L_m \cos \theta_r & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\frac{1}{2}L_m & L_m + L_{\sigma s} & -\frac{1}{2}L_m & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) & L_m \cos \theta_r & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\frac{1}{2}L_m & -\frac{1}{2}L_m & L_m + L_{\sigma s} & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) & L_m \cos \theta_r \\ L_m \cos \theta_r & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_m + L_{\sigma r} & -\frac{1}{2}L_m & -\frac{1}{2}L_m \\ L_m \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_m \cos \theta_r & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) & -\frac{1}{2}L_m & L_m + L_{\sigma r} & -\frac{1}{2}L_m \\ L_m \cos\left(\theta_r + \frac{4\pi}{3}\right) & L_m \cos\left(\theta_r + \frac{2\pi}{3}\right) & L_m \cos \theta_r & -\frac{1}{2}L_m & -\frac{1}{2}L_m & L_m + L_{\sigma r} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Relația (1.12), permite scrierea ecuațiilor fluxurilor sub formă matriceală:

$$[\Psi] = [L][i] \quad (1.13)$$

1.1.3. Cuplul electromagnetic. Ecuația de mișcare

Determinarea expresiei cuplului electromagnetic dezvoltat de mașina asincronă trifazată se poate face plecând de la teorema forțelor generalizate (lagrangeene) în câmp magnetic. Conform acestei teoreme, energia localizată în câmpul magnetic al celor șase înfășurări, este dată de relația:

$$W_m = \frac{1}{2} [\Psi]^t [i] \quad (1.14)$$

Cuplul electromagnetic dezvoltat de mașină va avea expresia generală:

$$M = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta_m} \right)_{i=\text{const.}} = \left(p \frac{\partial W_m}{\partial \theta_r} \right)_{i=\text{const.}} = \frac{1}{2} p \left[\frac{\partial}{\partial \theta_r} ([i]^t [L]^t [i]) \right]_{i=\text{const.}} = \frac{1}{2} p [i]^t \frac{\partial [L]^t}{\partial \theta_r} [i] \quad (1.15)$$

în care, p = numărul de perechi de poli ai mașinii, $\theta_m = \theta_r/p$ este unghiul mecanic dintre rotor și stator, θ_r fiind unghiul electric. De menționat este faptul că relația (1.15) nu evidențiază clar posibilitatea ca mașină să dezvolte un cuplu electromagnetic dependent de timp. Dependența cuplului de timp rezultă din dependența curenților și a inductanțelor de cuplaj de factorul timp (inductanțele de cuplaj depind de unghiul θ_r , care depinde la rândul său de timp).

Ecuația de mișcare este de forma:

$$M = M_s + J \frac{d\Omega_m}{dt} \quad (1.16)$$

unde, M este cuplul electromagnetic dezvoltat de mașină, M_s este cuplul rezistent la arbore (cuplul de sarcină), J reprezintă momentul cinetic al tuturor maselor în mișcare de rotație raportat la arborele mașinii, iar Ω_m este viteza unghiulară.

După cum se poate remarca, modelul matematic al mașinii asincrone în coordonatele fazelor, cuprinde un sistem de șase ecuații diferențiale de ordinul întâi pentru tensiunile fazelor statorice și rotorice, la care se adaugă ecuația de mișcare în care intervin inductanțele de cuplaj magnetic dintre rotor și stator. Aceste inductanțe sunt variabile în timp datorită variației în timp a poziției rotorului față de stator, ceea ce înseamnă că aceste inductanțe depind de modul de funcționare a mașinii. Din această cauză, modelul matematic al mașinii în coordonatele fazelor implică unele dificultăți de utilizare, în special în studiul regimurilor dinamice.

1.2. MODELUL MAȘINII ASINCRONE TRIFAZATE ÎN COORDONATE ORTOGONALE

1.2.1. Transformări de faze

În scopul obținerii unui sistem mai simplu de ecuații pentru modelarea matematică a mașinii asincrone trifazate, s-a introdus conceptul de *model bifazat al mașinii trifazate*. Pentru obținerea acestuia, fiecare din cele trei mărimi de fază (curenți, tensiuni, fluxuri), se reduce la câte două componente, după două axe ortogonale, la care se adaugă componenta homopolară a sistemului trifazat care, de cele mai multe ori nu există sau nu se ia în considerare în calcul, deoarece influența ei este

neglijabilă. Astfel, fiecare din înfășurările trifazate statorice și rotorice, se înlocuiește cu câte două înfășurări ortogonale, iar mașina trifazată se reduce la o mașină bifazată echivalentă.

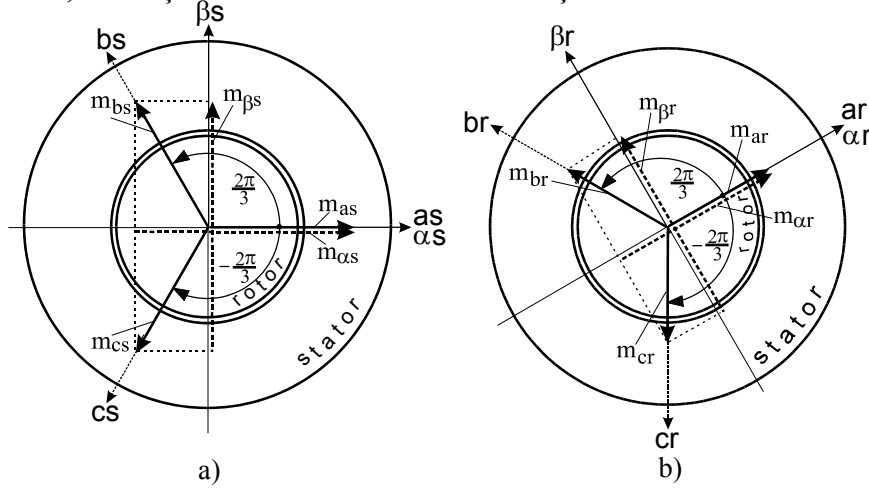


Fig. 1.2. Principiul transformării de faze: a) pentru mărimile statorice; b) pentru mărimile rotorice.

Relațiile de transformare din sistemul trifazat $as - bs - cs$ (respectiv $ar - br - cr$) în sistemul $\alpha s - \beta s$ (respectiv $\alpha r - \beta r$) se obțin prin proiectarea mărimilor corespunzătoare fiecărei axe din sistemul trifazat pe cele două axe ale sistemului bifazat. Notând generic aceste mărimi cu m (curenți, tensiuni, fluxuri) și neglijând în prima etapă componenta homopolară, se pot scrie conform figurii 1.2, următoarele relații:

$$\begin{cases} m_{\alpha s} = \frac{2}{3} \left[m_{as} + m_{bs} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{cs} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ m_{\beta s} = \frac{2}{3} \left[0 + m_{bs} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{cs} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{\alpha s} = \frac{2}{3} \left[m_{as} - \frac{1}{2} m_{bs} - \frac{1}{2} m_{cs} \right] \\ m_{\beta s} = \frac{2}{3} \left[0 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{bs} - \frac{\sqrt{3}}{2} m_{cs} \right] \end{cases}, \quad (1.17)$$

pentru mărimile statorice și respectiv:

$$\begin{cases} m_{\alpha r} = \frac{2}{3} \left[m_{ar} + m_{br} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{cr} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ m_{\beta r} = \frac{2}{3} \left[0 + m_{br} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{cr} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{\alpha r} = \frac{2}{3} \left[m_{ar} - \frac{1}{2} m_{br} - \frac{1}{2} m_{cr} \right] \\ m_{\beta r} = \frac{2}{3} \left[0 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{br} - \frac{\sqrt{3}}{2} m_{cr} \right] \end{cases}, \quad (1.18)$$

pentru mărimile rotorice.

Prin transformări de faze, efectele mărimilor electrice și magnetice nu trebuie să se modifice. Apariția factorului de proporționalitate $2/3$ se justifică prin faptul că, după cum este bine cunoscut, în cazul mașinilor trifazate, alimentate de la un sistem trifazat simetric de tensiuni sinusoidale, solenația rezultantă a mașinii este de $3/2$ ori mai mare decât solenația corespunzătoare unei singure faze. Dacă din solenația rezultantă se dorește obținerea solenației corespunzătoare unei singure faze, existența factorului $2/3$ este evidentă.

Relațiile (1.17) și (1.18), pot fi scrise matricial sub forma:

$$\begin{bmatrix} m_{\alpha s} \\ m_{\beta s} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{as} \\ m_{bs} \\ m_{cs} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} m_{\alpha r} \\ m_{\beta r} \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_{ar} \\ m_{br} \\ m_{cr} \end{bmatrix}. \quad (1.19)$$

Dacă se notează matricea de transformare a fazelor:

$$[F] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

și se fac notațiile:

$$[m]_{\alpha s \beta s} = \begin{bmatrix} m_{\alpha s} \\ m_{\beta s} \end{bmatrix}; \quad [m]_{\alpha r \beta r} = \begin{bmatrix} m_{\alpha r} \\ m_{\beta r} \end{bmatrix}; \quad [m]_{\alpha s \beta s \gamma s} = \begin{bmatrix} m_{\alpha s} \\ m_{\beta s} \\ m_{\gamma s} \end{bmatrix}; \quad [m]_{\alpha r \beta r \gamma r} = \begin{bmatrix} m_{\alpha r} \\ m_{\beta r} \\ m_{\gamma r} \end{bmatrix}, \quad (1.21)$$

relațiile (1.19) se pot scrie sub forma:

$$[m]_{\alpha s \beta s, \alpha r \beta r} = [F][m]_{\alpha s \beta s \gamma s, \alpha r \beta r \gamma r}. \quad (1.22)$$

Trecerea de la sistemul trifazat la sistemul bifazat, se face deci, prin intermediul matricei de transformare F care, în cazul în care nu se ține seama de componenta homopolară, are forma (1.20).

După cum se poate remarca din figura 1.2, în sistemele de coordonate bifazate ortogonale axele αs , respectiv αr , coincid cu axele fazelor as , respectiv ar .

Transformarea de faze inversă, de la sistemul bifazat la sistemul trifazat se face prin proiectarea mărimilor bifazate de pe axele αs , respectiv αr , pe axele as , bs , cs (figura 1.2). Se vor putea scrie relațiile:

$$\begin{cases} m_{as} = m_{\alpha s} \\ m_{bs} = m_{\alpha s} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{\beta s} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ m_{cs} = m_{\alpha s} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + m_{\beta s} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{as} = m_{\alpha s} \\ m_{bs} = -\frac{1}{2} m_{\alpha s} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\beta s} \\ m_{cs} = -\frac{1}{2} m_{\alpha s} - \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\beta s} \end{cases}; \quad (1.23)$$

pentru mărimile statorice și:

$$\begin{cases} m_{ar} = m_{\alpha r} \\ m_{br} = m_{\alpha r} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{\beta r} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ m_{cr} = m_{\alpha r} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + m_{\beta r} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{ar} = m_{\alpha r} \\ m_{br} = -\frac{1}{2} m_{\alpha r} + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\beta r} \\ m_{cr} = -\frac{1}{2} m_{\alpha r} - \frac{\sqrt{3}}{2} m_{\beta r} \end{cases}; \quad (1.24)$$

pentru mărimile rotorice.

Notând și în acest caz matricea de transformare inversă a fazelor:

$$[FI] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.25)$$

se poate scrie ecuația matricială de transformare inversă, similară cu (1.22)

$$[m]_{\alpha s \beta s \gamma s, \alpha r \beta r \gamma r} = [FI][m]_{\alpha s \beta s, \alpha r \beta r}. \quad (1.26)$$

În cazul în care se ține cont și de componenta homopolară, transformările de faze directe (din trifazat în bifazat) vor fi de forma:

$$\begin{cases} m_{\alpha s} = \frac{2}{3} \left[m_{as} + m_{bs} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{cs} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ m_{\beta s} = \frac{2}{3} \left[0 + m_{bs} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{cs} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ m_{hs} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} m_{as} + \frac{1}{2} m_{bs} + \frac{1}{2} m_{cs} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{\alpha s} = \frac{2}{3} \left[m_{as} - \frac{1}{2} m_{bs} - \frac{1}{2} m_{cs} \right] \\ m_{\beta s} = \frac{2}{3} \left[0 + \frac{\sqrt{3}}{2} m_{bs} - \frac{\sqrt{3}}{2} m_{cs} \right] \\ m_{hs} = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2} m_{as} + \frac{1}{2} m_{bs} + \frac{1}{2} m_{cs} \right] \end{cases}, \quad (1.27)$$

pentru mărimile statorice și similar pentru mărimile rotorice (indicele s se înlocuiește cu indicele r).

Notățiile:

$$[m]_{\alpha s \beta s} = \begin{bmatrix} m_{\alpha s} \\ m_{\beta s} \\ m_{hs} \end{bmatrix}, \quad [m]_{\alpha r \beta r} = \begin{bmatrix} m_{\alpha r} \\ m_{\beta r} \\ m_{hr} \end{bmatrix}, \quad (1.28)$$

respectiv:

$$[F] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.29)$$

permit scrierea ecuației matriciale de transformare directă sub forma (1.22), singura diferență constând în expresia matricei F .

Transformarea de faze inversă (de la sistemul bifazat la sistemul trifazat), se face la fel ca în cazul anterior, cu singura diferență că se ține cont de componenta homopolară:

$$\begin{cases} m_{as} = m_{\alpha s} + m_{hs} \\ m_{bs} = m_{\alpha s} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{\beta s} \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + m_{hs} \\ m_{cs} = m_{\alpha s} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + m_{\beta s} \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + m_{hs} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_{as} = m_{\alpha s} + m_{hs} \\ m_{bs} = -\frac{1}{2}m_{\alpha s} + \frac{\sqrt{3}}{2}m_{\beta s} + m_{hs} \\ m_{cs} = -\frac{1}{2}m_{\alpha s} - \frac{\sqrt{3}}{2}m_{\beta s} + m_{hs} \end{cases}; \quad (1.30)$$

pentru mărimile statorice și similar, prin înlocuirea indicelui s cu indicele r , pentru mărimile rotorice. În acest caz, matricea de transformare inversă a fazelor este:

$$[FI] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} = [F]^{-1} \quad (1.31)$$

adică inversa matricei F de transformare directă. Și în acest caz, se poate scrie ecuația matricială de transformare inversă, similară cu (1.26), singura diferență fiind că în loc de matricea FI , va apare matricea inversă F^{-1} .

Rezultatele transformărilor de faze sunt ilustrate în figura 1.3.

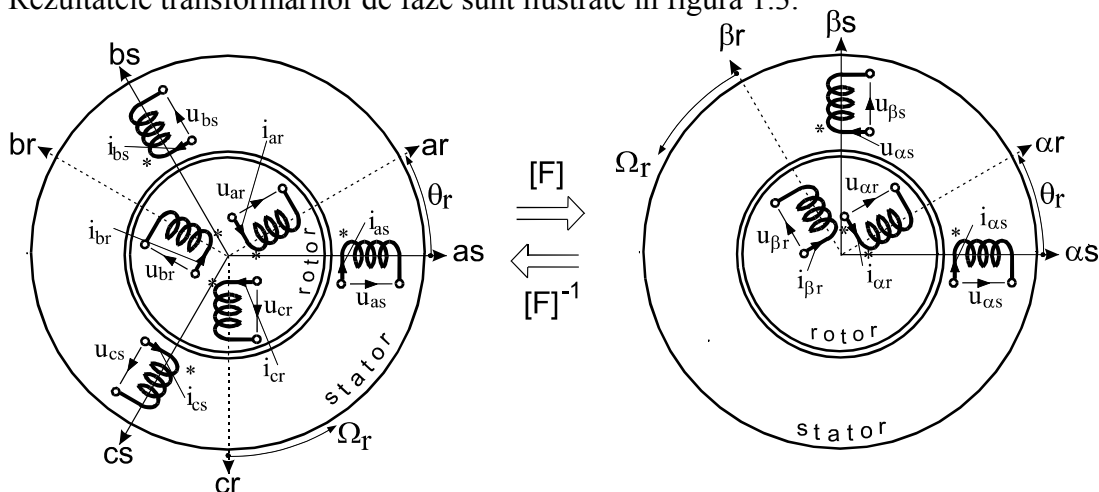


Fig. 1.3. Transformări de faze la mașina asincronă trifazată.

Din momentul în care se fac transformările de faze prezentate mai sus, mașina asincronă trifazată simetrică, se tratează ca o mașină asincronă bifazată simetrică. Pe lângă reducerea numărului de ecuații care descriu din punct de vedere matematic comportarea mașinii, modelul bifazat simplifică și ecuațiile de funcționare, prin faptul că între înfășurările de fază ale aceleiași armături (ale statorului sau ale rotorului) nu mai există cuplaje magnetice, deoarece axele magnetice ale înfășurărilor armăturii respective sunt ortogonale. Din aceste motive, în cele ce urmează se va considera ca punct de plecare o mașină asincronă bifazată echivalentă cu mașina asincronă trifazată (deoarece a

8

Aplicând transformările de axe, ecuațiile de funcționare ale mașinii asincrone bifazate se vor putea scrie în referențialul unic $d - q$, care în cazul cel mai general se rotește față de o axă de referință fixă cu viteza θ_f . Principiul și avantajele transformărilor de axe sunt ilustrate în figura 1.5.

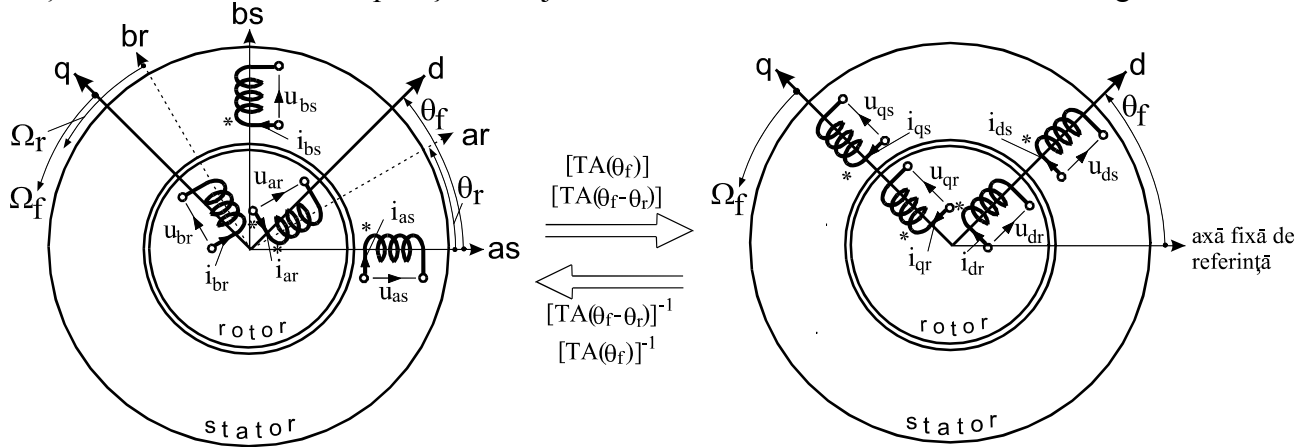


Fig. 1.5. Transformări de axe la mașina asincronă bifazată.

Utilizând relațiile (1.34) sau (1.36), pentru tensiunile, curenții și fluxurile din ecuațiile (1.32), vor rezulta ecuațiile tensiunilor mașinii asincrone bifazate, scrise într-un referențial comun $d - q$:

$$\begin{cases} u_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d}{dt} \Psi_{ds} - \omega_f \Psi_{qs} \\ u_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d}{dt} \Psi_{qs} + \omega_f \Psi_{ds} \end{cases}; \quad \begin{cases} u_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d}{dt} \Psi_{dr} - (\omega_f - \omega_r) \Psi_{qr} \\ u_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d}{dt} \Psi_{qr} + (\omega_f - \omega_r) \Psi_{dr} \end{cases}, \quad (1.39)$$

în care, $\omega_f = d(\theta_f)/dt$ și $\omega_r = d(\theta_r)/dt$, deoarece am presupus inițial $p = 1$, deci $\omega_f = \Omega_f$ și $\omega_r = \Omega_r$.

Observație

Tensiunea aplicată la bornele înfășurării de fază a mașinii este echilibrată de căderea de tensiune pe rezistența ohmică a fazei respective și de tensiunea indusă datorită fluxului magnetic variabil îmbrățișat de faza în discuție. Tensiunea totală indusă într-o înfășurare E_t , nu depinde de viteza sistemului de referință:

$$e_t = -\frac{d}{dt} \Psi_t. \quad (1.40)$$

Tensiunea indusă rezultantă (1.40) se descompune în două componente: una de pulsație (fluxul variază în timp datorită curentului variabil în timp care-l produce) e_p și alta de rotație (fluxul variază în timp datorită schimbării poziției în timp a rotorului față de stator) e_r .

$$e_p = -\frac{\partial \Psi_t}{\partial t}, \quad e_r = -\frac{\partial \Psi_t}{\partial t} \cdot \frac{d\theta}{dt}, \quad e_t = e_p + e_r, \quad \frac{d\theta}{dt} = \omega_f - \omega_{s,r}, \quad (1.41)$$

iar $\omega_{s,r}$ reprezintă viteza cu care se rotesc conductoarele înfășurării respective față de un referențial fix. În cazul statorului, $\omega_s = 0$, iar pentru rotor, $\omega_r = \omega_r$. Prin aplicarea relațiilor (1.41) unei înfășurări din axa d și respectiv q , se rezultă:

$$e_{di} = -\frac{\partial \Psi_{di}}{\partial t} - \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{\partial \Psi_{di}}{\partial \theta}, \quad e_{qi} = -\frac{\partial \Psi_{qi}}{\partial t} - \frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{\partial \Psi_{qi}}{\partial \theta}. \quad (1.42)$$

Deoarece s-a presupus inițial că fluxurile au o distribuție spațială sinusoidală a fluxurilor magnetice Ψ_{di} și Ψ_{qi} , se poate afirma:

$$\frac{\partial \Psi_{di}}{\partial \theta} = -\Psi_{qi}; \quad \frac{\partial \Psi_{qi}}{\partial \theta} = +\Psi_{di}. \quad (1.43)$$

Semnele “-” și “+” din relațiile (1.43) evidențiază faptul că fluxul Ψ_{qi} induce tensiune de rotație în înfășurarea di aflată la 90° în urmă față de sensul de rotație ales, în timp ce Ψ_{di} induce tensiune de rotație în înfășurarea qi aflată la 90° în avans, în raport cu același sens pozitiv de rotație ales. Ecuațiile (1.43) pun în evidență faptul cunoscut că tensiunea indusă prin rotație într-o înfășurare, este efectul curentului care circulă prin înfășurarea din cealaltă axă ortogonală, fapt demonstrat de ecuațiile (1.39).

1.2.3. Ecuațiile fluxurilor mașinii asincrone bifazate

Înfășurările statorului și ale rotorului unei mașini asincrone bifazate sunt cuplate electromagnetic prin intermediul câmpului magnetic din întrefier, chiar dacă sunt izolate din punct de vedere galvanic. Atât fluxul statoric, cât și cel rotoric sunt rezultatul contribuției comune al curenților care circulă prin înfășurările celor două armături. Deoarece între rotor și stator există în general o mișcare relativă, inductanța mutuală dintre o înfășurare statorică și o înfășurare rotorică va depinde de poziția rotorului la un moment dat. După cum am precizat, curba de magnetizare a fierului se consideră liniară, în acest caz putând aplica principiul suprapunerii efectelor pentru calculul fluxurilor.

Poziția relativă dintre rotor și stator la un moment dat este θ_r , dintre axa magnetică a fazei as a statorului și respectiv a fazei ar a rotorului, conform figurii 1.6.

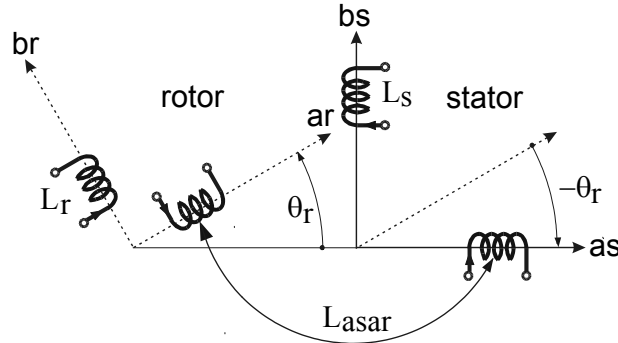


Fig. 1.6. Inductanțele mașinii asincrone bifazate.

Pentru exprimarea fluxurilor de fază se va ține cont de faptul că fluxul îmbrățișat de o fază oarecare a mașinii este determinat atât de curenții statorici, cât și de cei rotorici. În acest context se poate scrie:

$$\begin{cases} \Psi_{as} = L_s i_{as} + L_{asar} i_{ar} + L_{asbr} i_{br} ; & \Psi_{bs} = L_s i_{bs} + L_{bsar} i_{ar} + L_{bsbr} i_{br} \\ \Psi_{ar} = L_r i_{ar} + L_{aras} i_{as} + L_{arbs} i_{bs} ; & \Psi_{br} = L_r i_{br} + L_{bras} i_{as} + L_{brbs} i_{bs} , \end{cases} \quad (1.44)$$

în care inductanțele care intervin sunt indicate în figura 1.6. Considerând ca și în cazul mașinii asincrone trifazate L_m inductanța mutuală maximă dintre o fază statorică și o fază rotorică în momentul în care axele magnetice ale celor două faze sunt coliniare, inductanțele mutuale din ecuațiile (1.44) vor avea forma:

$$\begin{cases} L_{asar} = L_{bsbr} = L_m \cos(\theta_r) \\ L_{aras} = L_{brbs} = L_m \cos(-\theta_r) = L_{asar} = L_{bsbr} \\ L_{asbr} = L_m \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_r\right) = -L_m \sin(\theta_r) = L_m \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) = L_{bras} \\ L_{bsar} = L_m \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_r\right) = L_m \sin(\theta_r) = L_{arbs} . \end{cases} \quad (1.45)$$

Deoarece rotorul își modifică poziția față de stator (θ_r variază în timp), ecuațiile fluxurilor vor avea coeficienți constanți numai dacă sunt raportate la același sistem de axe. Pentru raportarea la referențialul $d-q$ unic, se consideră relațiile (1.36) care se aplică sistemului (1.44), cu inductanțele definite în (1.45). Va rezulta:

$$\begin{cases} \Psi_{ds} = L_s i_{ds} + L_m i_{dr} ; & \Psi_{qs} = L_s i_{qs} + L_m i_{qr} \\ \Psi_{dr} = L_r i_{dr} + L_m i_{ds} ; & \Psi_{qr} = L_r i_{qr} + L_m i_{qs} . \end{cases} \quad (1.46)$$

Inductanțele totale proprii ale înfășurărilor de fază L_s și L_r au aceleași expresii ca cele de la mașina trifazată, fiind suma dintre inductanța proprie utilă și inductanța de scăpări. Dacă fluxurile și curenții sunt raportați la stator, se poate scrie:

$$L_{ms} = L_{mr} = L_m , \quad (1.47)$$

relație care permite exprimarea convenabilă a fluxurilor și ulterior, la reprezentarea schemelor echivalente.

I.2.4. Curentul de magnetizare

Fundamentală tensiunii magnetomotoare (solenajiei) produse de una dintre înfășurările de fază ale mașinii, are o repartiție sinusoidală de-a lungul întrefierului și valoare maximă pe direcția axei magnetice a înfășurării respective. Din această cauză, solenajia unei faze se poate reprezenta ca un vector coliniar cu direcția axei magnetice a fazei respective.

Solenajia rezultantă în mașină este efectul tuturor curenților de fază, putând fi scrisă vectorial sub forma:

$$\vec{V}_{rez} = \vec{V}_{as} + \vec{V}_{bs} + \vec{V}_{ar} + \vec{V}_{br} . \quad (1.48)$$

Vectorii reprezentativi ai solenajiei de fază sunt proporționali cu curenții ce străbat înfășurările fazei respective:

$$\vec{V}_{rez} = k_{vs}(\vec{i}_{as} + \vec{i}_{bs}) + k_{vr}(\vec{i}_{ar} + \vec{i}_{br}) , \quad (1.49)$$

în care curenții rotorici sunt cei fizici care circulă prin mașină, iar coeficienții de proporționalitate k_{vs} și k_{vr} depind de parametrii armăturii statorice și respectiv rotorice.

Curentul de magnetizare va fi vectorul:

$$\vec{i}_m = \frac{V_{rez}}{k_{vs}} = \vec{i}_{as} + \vec{i}_{bs} + \frac{k_{vr}}{k_{vs}}(\vec{i}_{ar} + \vec{i}_{br}) , \quad (1.50)$$

unde raportul k_{vr}/k_{vs} este factorul de raportare la stator, al curenților rotorici. Expresia curentului de magnetizare va deveni în acest caz:

$$\vec{i}_m = \vec{i}_{as} + \vec{i}_{bs} + \vec{i}_{ar} + \vec{i}_{br} . \quad (1.51)$$

Proiectând vectorul curent de magnetizare pe axele $d-q$:

$$\begin{cases} i_{md} = i_{as} \cos \theta_f + i_{bs} \sin \theta_f + i_{ar} \cos(\theta_f - \theta_r) + i_{br} \sin(\theta_f - \theta_r) \\ i_{mq} = -i_{as} \sin \theta_f + i_{bs} \cos \theta_f - i_{ar} \sin(\theta_f - \theta_r) + i_{br} \cos(\theta_f - \theta_r) \end{cases} \quad (1.52)$$

și ținând cont de relațiile (1.33), rezultă componentele curentului de magnetizare:

$$\begin{cases} i_{md} = i_{ds} + i_{dr} \\ i_{mq} = i_{qs} + i_{qr} . \end{cases} \quad (1.53)$$

Pornind de la relația (1.51), se pot obține în mod similar, componentele curentului de magnetizare pe axele $as - bs$ sau $ar - br$.

I.2.5. Puterea și cuplul electromagnetic

Puterea electrică instantanee a mașinii asincrone bifazate caracterizează circulația energiei între rețeaua electrică și mașină. În cazul cel mai general când alimentarea se face atât prin stator cât și prin rotor, această putere instantanee va avea expresia:

$$P_i = u_{as} i_{as} + u_{bs} i_{bs} + u_{ar} i_{ar} + u_{br} i_{br} . \quad (1.54)$$

Deoarece operația de raportare nu modifică forma expresiei puterii instantanee, expresia (1.54) este valabilă în ambele cazuri (parametrii rotorici reali sau raportați).

În (1.54) se aplică transformările de axe (1.39) și se obține expresia puterii instantanee în referențialul $d-q$:

$$P_i = u_{ds} i_{ds} + u_{qs} i_{qs} + u_{dr} i_{dr} + u_{qr} i_{qr} . \quad (1.55)$$

Și în acest caz, pentru deducerea expresiei cuplului electromagnetic, se va apela la teorema forțelor generalizate (lagrangeene) în câmp magnetic:

$$M = \left(\frac{\partial W_m}{\partial \theta} \right)_{i=\text{const.}} \quad (1.56)$$

W_m reprezintă energia localizată în câmpul magnetic al celor patru înfășurări cuplate magnetic, iar coordonata generalizată θ este unghiul geometric care reflectă poziția rotorului în raport cu statorul la un moment dat. La o mașină bipolară, $\theta = \theta_r$, iar în cazul general, $\theta = \theta_r/p$.

$$W_m = \frac{1}{2} (\Psi_{as} i_{as} + \Psi_{bs} i_{bs} + \Psi_{ar} i_{ar} + \Psi_{br} i_{br}) . \quad (1.57)$$

Deoarece curenții de fază sunt constanți în raport cu coordonata generalizată, se poate scrie:

$$M = \frac{1}{2} p \left[i_{as} \frac{\partial}{\partial \theta_r} \Psi_{as} + i_{bs} \frac{\partial}{\partial \theta_r} \Psi_{bs} + i_{ar} \frac{\partial}{\partial \theta_r} \Psi_{ar} + i_{br} \frac{\partial}{\partial \theta_r} \Psi_{br} \right] . \quad (1.58)$$

În conformitate cu relațiile (1.44) și (1.45) care definesc fluxurile magnetice în mașină și utilizând relațiile de transformare (1.39), se va obține expresia cuplului electromagnetic în referențialul comun $d - q$, în funcție de curenți:

$$M = p L_m (i_{qs} i_{dr} - i_{ds} i_{qr}) \quad (1.59)$$

Pe baza relațiilor (1.46) se poate exprima cuplul electromagnetic în funcție de mărimile statorice:

$$M = p (\Psi_{ds} i_{qs} - \Psi_{qs} i_{ds}) \quad (1.60)$$

sau în funcție de mărimile rotorice:

$$M = p (\Psi_{qr} i_{dr} - \Psi_{dr} i_{qr}) \quad (1.61)$$

Precizare I. Ecuația de mișcare își păstrează forma (1.16).

Precizare II. Din motive didactice, pentru o înțelegere mai ușoară a modului de prezentare a modelului matematic al mașinii asincrone bifazate, provenite dintr-o mașină asincronă trifazată simetrică, s-au folosit relațiile de transformare de axe care consideră componenta homopolară nulă. Neglijarea componentei homopolare nu introduce erori în cazul sistemelor trifazate sau bifazate simetrice. Pe de altă parte, modelul prezentat mai sus corespunde unei mașini asincrone bifazate simetrice reale.

1.2.6. Modelul mașinii asincrone într-un referențial solidar cu statorul

Odată realizate transformările de faze, mașina asincronă trifazată devine o mașină bifazată, care prin transformări de coordonate se poate modela într-un referențial unic $d - q$. Acest referențial se rotește față de o referință fixă cu viteza ω_f . Dacă se particularizează viteza de rotație a referențialului unic $\omega_f = 0$, se va obține modelul mașinii într-un *referențial solidar cu statorul*.

Plecând de la sistemul de ecuații (1.39) și anulând viteza de rotație a referențialului unic se vor obține ecuațiile de funcționare a mașinii într-un referențial solidar cu statorul.

$$\begin{cases} u_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d}{dt} \Psi_{ds} ; & \Psi_{ds} = L_s i_{ds} + L_m i_{dr} \\ u_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d}{dt} \Psi_{qs} ; & \Psi_{qs} = L_s i_{qs} + L_m i_{qr} \\ u_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d}{dt} \Psi_{dr} + \omega_r \Psi_{qr} ; & \Psi_{dr} = L_r i_{dr} + L_m i_{ds} \\ u_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d}{dt} \Psi_{qr} - \omega_r \Psi_{dr} ; & \Psi_{qr} = L_r i_{qr} + L_m i_{qs} \end{cases} \quad (1.62)$$

Ecuațiile (1.62) permit realizarea schemei echivalente prezentată în figura (1.7).

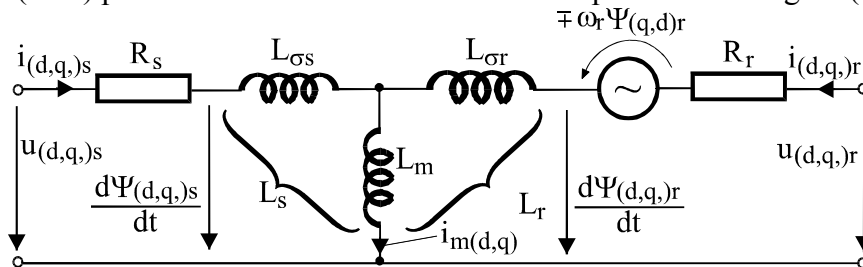


Fig. 1 7. Schema echivalentă a mașinii asincrone într-un referențial $d - q$ solidar cu statorul ($\omega_r=0$).

Ecuațiile (1.62) au o formă relativ simplă, dar ascund existența tensiunii de rotație în circuitul statorului. Cele două înfășurări statorice ortogonale par independente una față de cealaltă. În realitate, ele sunt cuplate magnetic datorită mișcării rotorului cu viteza ω_r , prin fluxul rotor $\Psi_{(q,d)r}$, flux care depinde de tensiunea de rotație, deci de ω_r .

Ținând cont de așezarea ortogonală a înfășurărilor, se consideră că modelul în coordonate statorice este cel mai adecvat în anumite cazuri, deoarece nu mai necesită nici o transformare de coordonate a parametrilor statorici.

I. 2.7. Modelul mașinii asincrone într-un referențial comun, care se rotește cu viteza ω_f

Plecând de la ecuațiile generale (1.39), se pot deduce ecuațiile de funcționare ale mașinii asincrone în regim de simplă alimentare, într-un referențial care se rotește cu viteza ω_f față de o axă de referință fixă. În majoritatea cazurilor, viteza referențialului comun ω_f este egală cu viteza câmpului magnetic învârtitor rezultat din mașină (viteza de sincronism).

$$\begin{cases} u_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d}{dt} \Psi_{ds} - \omega_f \Psi_{qs}; & \Psi_{ds} = L_s i_{ds} + L_m i_{dr} \\ u_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d}{dt} \Psi_{qs} + \omega_f \Psi_{ds}; & \Psi_{qs} = L_s i_{qs} + L_m i_{qr} \\ u_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d}{dt} \Psi_{dr} - (\omega_f - \omega_r) \Psi_{qr}; & \Psi_{dr} = L_r i_{dr} + L_m i_{ds} \\ u_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d}{dt} \Psi_{qr} + (\omega_f - \omega_r) \Psi_{dr}; & \Psi_{qr} = L_r i_{qr} + L_m i_{qs} \end{cases} \quad (1.63)$$

Schema echivalentă corespunzătoare acestui model este prezentată în figura 1.8.

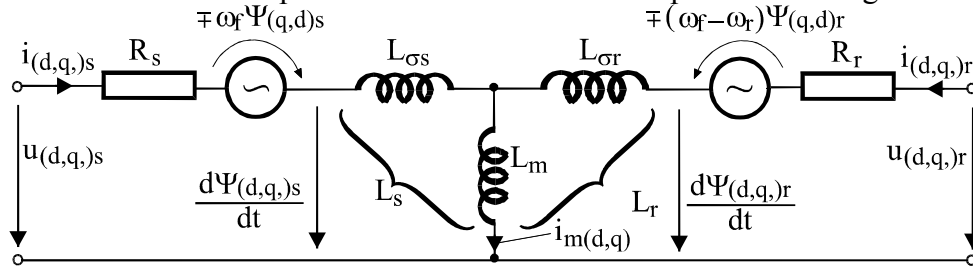


Fig. 1.8. Schema echivalentă a mașinii asincrone într-un referențial $d - q$ solidar cu câmpul magnetic învârtitor.

Cuplajul dintre stator și rotor, nu este în realitate o conexiune electrică, ci este rezultatul cuplajului magnetic prin intermediul fluxului Ψ_m din întrefier:

$$\Psi_{m(d,q)} = L_m (i_{(d,q)s} + i_{(d,q)r}) .$$

Conectarea electrică a rotorului la stator (ca și în cazul anterior) se face în mod fictiv, în urma unor artificii matematice, în urma raportării mărimilor din rotor la frecvența și numărul de spire al înfășurărilor statorice.

Trebuie de menționat faptul că statorul și rotorul sunt cuplate nu numai prin intermediul inductanței L_m și a curentului de magnetizare, ci și prin cele două surse de tensiune de rotație, la care intervin fluxurile. Pe lângă aceasta, apare o legătură cu caracter electrico-mecanic datorită unei surse de tensiune din circuitul rotorului, care depinde de viteza acestuia ω_r .

I.2.8. Modelul mașinii asincrone într-un referențial solidar cu rotorul

Dacă *referențialul $d-q$ este solidar cu rotorul*, $\omega_f = \omega_r$, iar funcționarea mașinii este descrisă de sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} u_{ds} = R_s i_{ds} + \frac{d}{dt} \Psi_{ds} - \omega_r \Psi_{qs}; & \Psi_{ds} = L_s i_{ds} + L_m i_{dr} \\ u_{qs} = R_s i_{qs} + \frac{d}{dt} \Psi_{qs} + \omega_r \Psi_{ds}; & \Psi_{qs} = L_s i_{qs} + L_m i_{qr} \\ u_{dr} = R_r i_{dr} + \frac{d}{dt} \Psi_{dr}; & \Psi_{dr} = L_r i_{dr} + L_m i_{ds} \\ u_{qr} = R_r i_{qr} + \frac{d}{dt} \Psi_{qr}; & \Psi_{qr} = L_r i_{qr} + L_m i_{qs} \end{cases} \quad (1.64)$$

Schema echivalentă corespunzătoare sistemului (1.64) este prezentată în figura 1.9.

Modelul mașinii în referențial $d-q$ solidar cu rotorul pune în evidență influența curentului dintr-o fază statorică asupra curentului din cealaltă înfășurare de fază prin intermediul fluxului $\Psi_{(q,d)s}$ și a mișcării rotorului ω_r . În acest caz, înfășurările rotorice par independente, dar legătura dintre ele se realizează prin fluxul statoric $\Psi_{(q,d)s}$ și ω_r .

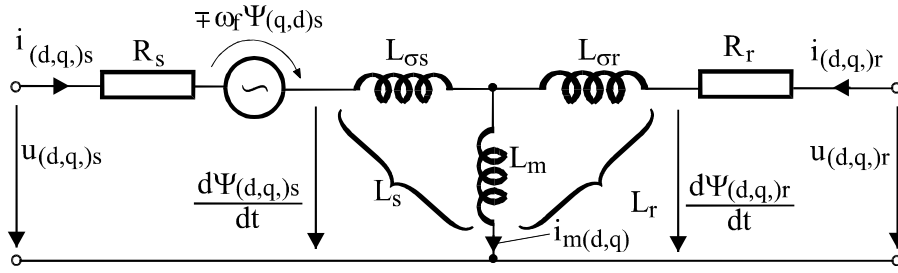


Fig. 1.9. Schema echivalentă a mașinii asincrone într-un referențial $d - q$ solidar cu rotorul.

Indiferent de modul cum se consideră sistemul de referință $d - q$: solidar cu statorul ($\omega_f = 0$), solidar cu rotorul ($\omega_f = \omega_r$) sau rotindu-se cu ω_f (uzual se consideră solidar cu câmpul magnetic în-vârtitor din întrefier, $\omega_f =$ viteza de sincronism), expresiile cuplului electromagnetic (1.59), (1.60), (1.61) precum și ecuația de mișcare (1.16) rămân aceleași.

1.3. MODELUL MAȘINII ASINCRONE BIFAZATE CU FAZORI SPAȚIALI

Modelul matematic al mașinilor electrice de curent alternativ având la bază teoria fazorilor spațiali este după cum se va vedea în continuare mai simplu, deoarece fiecare mărime bifazată sau trifazată (tensiune, curent, flux), se reduce la un singur vector plan (fazor spațial), care se poate trata ca o mărime complexă. Acest fapt permite o scriere mai compactă a ecuațiilor de funcționare a mașinii.

Principiul modelării mașinii asincrone bifazate cu fazori spațiali este ilustrat în figura 1.10.

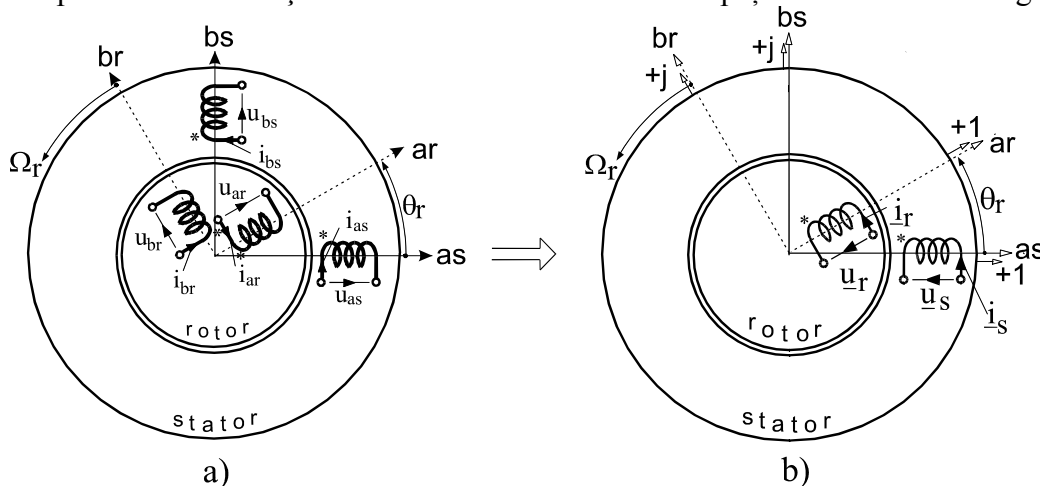


Fig. 1.10. Principiul modelării mașinii asincrone bifazate cu fazori spațiali.

Folosirea fazorilor spațiali în teoria unitară a mașinilor de curent alternativ conferă o imagine unitară a fenomenelor, permițând o interpretare fizică elegantă și intuitivă. Utilizarea modelului matematic cu fazori spațiali, a conferit premisele apariției conceptului general de sistem de reglare asociat acestor mașini, constituind suportul fizic pentru studiul sistemului general mașină – convertor static – sisteme de reglare în buclă închisă.

În literatura de specialitate, s-au folosit denumirile: *fazor spațial*, *sinor reprezentativ* sau *sinor spațialo – temporal reprezentativ*, *fazor spațialo – temporal reprezentativ*. Se consideră în general că denumirea de *fazor spațial* este cea mai recomandată, deoarece în compunerea acestuia intervin toate elementele componente instantanee ale fazelor. Fazorul spațial caracterizează întregul sistem, după cum urmează:

- indică evoluția în timp a mărimilor de fază, defazajul în timp apărând sub formă vectorială, fapt care justifică denumirea de “fazor” în loc de vector;
- indică și defazajul în spațiu, datorat dispunerii din punct de vedere constructiv a înfășurărilor, acest lucru justificând denumirea de “spațial”. Matematic, aceasta intervine prin aplicarea vectorilor în direcția axelor magnetice ale fazelor.

Se poate afirma că fazorii spațiali sunt deci niște vectori, care poartă informații despre evoluția în timp a mărimilor de fază și despre evoluția în spațiu a rezultantei acestora, fiind conținuți într-un plan perpendicular pe axa arborelui mașinii.

I.3.1. Vectorul spațial asociat curentului printr-un solenoid

Dacă un solenoid cu w număr de spire este parcurs de un curent de valoare instantanee i , va apare un câmp magnetic produs de solenația $\underline{v} = wi$ (figura 1.11).

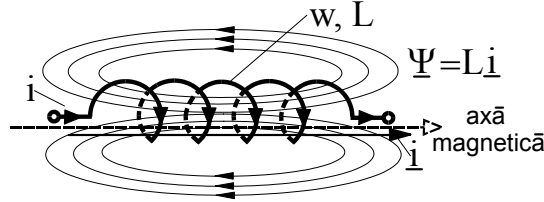


Fig. 1.11. Vectorul spațial de curent al unui solenoid.

Solenația acționează în direcția axei spațiale de magnetizare a solenoidului (bobinei). De aici rezultă faptul că direcția fluxului magnetic variază odată cu poziția spațială a solenoidului. Se poate spune deci, că solenația este caracterizată de un vector spațial a cărui direcție coincide cu direcția axei de magnetizare a solenoidului și a cărui mărime este egală cu valoarea instantanee a solenației:

$$\underline{v} = w \cdot \underline{i} . \quad (1.65)$$

Numărul de spire w este un număr scalar. Din această cauză, curentul i va deveni o mărime vectorială a cărei direcție coincide cu direcția solenației, respectiv cu direcția fluxului. Considerând L inductanța solenoidului, se poate scrie:

$$\underline{\Psi} = L \cdot \underline{i} . \quad (1.66)$$

I.3.2. Fazorii spațiali ai mașinii asincrone bifazate

Este cunoscut din teoria generală a mașinilor de curent alternativ că, datorită spirelor înfășurătorilor, distribuția solenației (a curentului) de-a lungul întrefierului este discontinuă (solenația variază în trepte). Teoria clasică a mașinilor electrice ia în considerare numai fundamentala solenației $v_{(1)}$, neglijând armonicile spațiale superioare ale acesteia. Se presupune în cele ce urmează o distribuție continuă sinusoidală de-a lungul întrefierului și pentru curent.

Fundamentala solenației poate fi reprezentată de un vector spațial $\underline{v}$, care are direcția coliniară cu direcția valorii maxime a sinusoidei, iar lungimea lui este proporțională cu această valoare maximă. Valoarea maximă a distribuției spațiale periferice a curentului și solenația diferă numai prin numărul de spire al înfășurării. Deci și distribuția periferică de curent se poate reprezenta la un moment dat printr-un vector spațial de curent $\underline{i}$, în direcția vectorului spațial al solenației. Fluxul magnetic este proporțional cu curentul, care la rândul lui este proporțional cu solenația și conform relațiilor (1.65), (1.66) și fluxul ce caracterizează câmpul magnetic, poate fi reprezentat printr-un vector $\underline{\Psi}$ care are aceeași direcție.

În cazul unei mașini asincrone bifazate, vor exista două înfășurări cu axe magnetice ortogonale, conform figurii 1.12 a), în care s-au reprezentat liniile de câmp corespunzătoare fazei a statorice, precum și vectorul corespunzător fluxului acestei faze. Acest vector își va schimba sensul periodic, dacă faza este parcursă de curent alternativ. Vectorul corespunzător curentului va avea aceeași direcție și același sens.

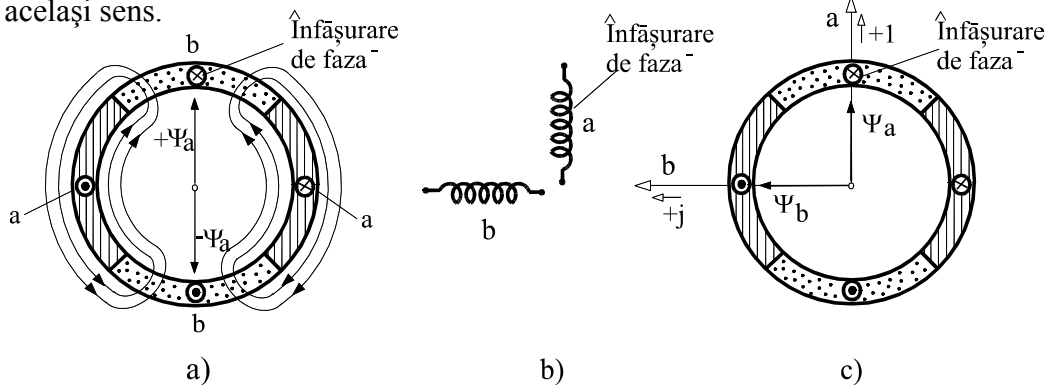


Fig. 1.12. a) liniile de câmp ale fazei a ; b) reprezentarea după direcția axei magnetice; c) sensurile de referință ale fluxurilor.

Indiferent de modul de evoluție în timp a curentului ce parcurge înfășurarea de fază, lui îi va corespunde un vector spațial de direcție fixă, coliniar cu axa magnetică a înfășurării, sensul și lungimea sa fiind determinate de valoarea instantanee a curentului în momentul considerat. În figura 1.12 b), s-au reprezentat simbolic înfășurările fazelor a și b după direcțiile axelor magnetice ale înfășurărilor.

Corespunzător celor două faze ale mașinii, apar doi vectori spațiali de flux magnetic Ψ_a și Ψ_b defazați în spațiu cu $\pi/2$ radiani electrici. Lungimea și sensul fiecăruia sunt impuse de valoarea instantanee a curentului care parcurge faza respectivă. În figura 1.12 c), sunt indicate sensurile pozitive ale fluxurilor corespunzătoare celor două faze ale mașinii.

Curenților de fază i_{as} și i_{bs} le vor corespunde vectorii spațiali $\underline{i}_{as}$ și $\underline{i}_{bs}$. Direcția în spațiu a vectorilor $\underline{i}_{as}$ și $\underline{i}_{bs}$ este impusă de poziția în spațiu a axelor magnetice ale înfășurărilor (poziția înfășurărilor). În cazul mașinii de construcție obișnuită, cu simetrie cilindrică, toți vectorii spațiali se găsesc într-un plan perpendicular pe axa longitudinală a mașinii (perpendicular pe arborele mașinii), având fiecare dintre ei o direcție fixă, variind doar sensurile și lungimile lor, după cum evoluează în timp curenții de fază.

Vectorii corespunzători curenților de fază, având poziție bine determinată în spațiu, se pot exprima prin numere complexe. Dacă se consideră axa reală a sistemului de coordonate în direcția axei de magnetizare a fazei a , vectorii spațiali ai celor două faze vor fi:

$$\underline{i}_{as} = i_{as} ; \quad \underline{i}_{bs} = j i_{bs} . \quad (1.67)$$

Efectul rezultat al celor doi vectori de curenți este dat de suma lor vectorială, care conduce la un vector bifazat de curent:

$$\underline{i}_s = \underline{i}_{as} + \underline{i}_{bs} = i_{as} + j i_{bs} . \quad (1.68)$$

Cei doi curenți de fază se caracterizează global, printr-o singură mărime și anume fazorul spațial de curent, care are două componente: una reală și una imaginară.

Este de menționat faptul că, prin însumarea vectorilor spațiali ai celor doi curenți de fază se obține un vector rezultat corect, numai dacă repartiția câmpului magnetic de-a lungul întrefierului este sinusoidală. Acest lucru este valabil dacă se ia în considerare numai fundamentala câmpului magnetic din întrefier.

Armonicile de ordin superior constituie consecința distribuției înfășurărilor și a neregularităților întrefierului produse de creștături sau poli. Și pentru armonicile de ordin superior poate fi extins vectorul spațial și la rândul său fazorul spațial.

În mod analog, se definește fazorul spațial al tensiunii și al fluxului:

$$\underline{u}_s = u_{as} + j u_{bs} ; \quad \underline{\Psi}_s = \Psi_{as} + j \Psi_{bs} , \quad (1.69)$$

în care u_{as} , u_{bs} , Ψ_{as} , Ψ_{bs} , sunt valorile instantanee ale tensiunilor și respectiv ale fluxurilor corespunzătoare celor două faze ale mașinii.

Nu trebuie de uitat faptul că sistemul de axe al planului complex, în cazul mărimilor statorice este legat de stator (figura 1.10), deci este fix în spațiu.

Când se definesc fazorii spațiali ai mărimilor rotorice, se utilizează un plan complex a cărui axă reală coincide cu direcția axei de magnetizare a înfășurării fazei ar a rotorului. Prin urmare, fazorii spațiali corespunzători mărimilor rotorice în sistemul complex legat de rotor vor fi:

$$\underline{i}_r = i_{ar} + j i_{br} ; \quad \underline{u}_r = u_{ar} + j u_{br} ; \quad \underline{\Psi}_r = \Psi_{ar} + j \Psi_{br} . \quad (1.70)$$

Definirea fazorilor spațiali permite reducerea celor două faze ale mașinii la o singură fază complexă pentru stator și o singură fază complexă pentru rotor, după cum se poate vedea în figura 1.10.

Reprezentarea din figură este simbolică. Faza statorică complexă care este suportul fazorilor spațiali statorice a fost reprezentată în axa reală a planului complex statoric, dar poziția ei este de fapt impusă de poziția fazorului spațial în acest plan la un moment dat. Aceeași precizare este valabilă și pentru faza complexă rotorică. S-a preferat acest mod de reprezentare intuitiv pentru a se demonstra că folosirea fazorilor spațiali permite reducerea celor două faze ale mașinii la o singură fază complexă statorică și respectiv rotorică, solidare cu sisteme de referință complexe diferite. Prin aceasta, este suficient să se scrie câte o singură ecuație de funcționare pentru stator și respectiv rotor, în loc de două ecuații, corespunzătoare fiecărei faze.

I.3.3. Transformări de axe ale fazorilor spațiali

Un fazor spațial este definit într-un plan complex, fiind de forma:

$$\underline{y} = y_{\text{Re}} + j y_{\text{Im}} = y e^{j\gamma}, \quad (1.71)$$

unde y reprezintă modulul vectorului, iar γ argumentul său. Expresia vectorului va depinde de axele planului complex la care este raportat. Se consideră o axă fixă de referință și două sisteme de axe a căror poziție este definită prin unghiurile α_1 și α_2 , ca în figura 1.13.

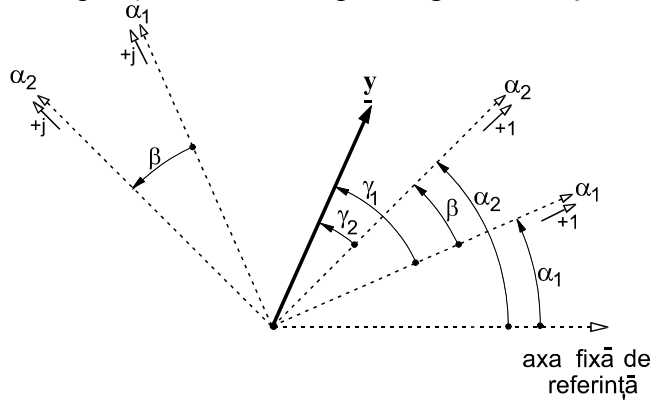


Fig. 1.13. Transformări de axe ale fazorilor spațiali.

Fazorul spațial $\underline{y}$ având modulul y , are argumentul γ_1 sau γ_2 , după cum este raportat la planul complex α_1 sau α_2 . El poate fi scris:

$$\underline{y}_{\alpha_1} = y e^{j\gamma_1}, \quad (1.72)$$

dacă se raportează la planul complex α_1 , sau:

$$\underline{y}_{\alpha_2} = y e^{j\gamma_2}, \quad (1.73)$$

dacă se raportează la planul complex α_2 .

Trecerea de la planul complex α_1 la planul complex α_2 se face prin relația:

$$\underline{y}_{\alpha_2} = (\underline{y}_{\alpha_1} e^{j\gamma_1}) e^{j(\gamma_2 - \gamma_1)}. \quad (1.74)$$

β este unghiul cu care a fost rotit planul

complex:

$$\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = \gamma_1 - \gamma_2. \quad (1.75)$$

În concluzie, dacă planul complex este rotit în sens direct cu unghiul β , fazorul spațial raportat la planul complex rotit ($\underline{y}_{\alpha_2}$) se va exprima prin fazorul anterior ($\underline{y}_{\alpha_1}$) care se înmulțește cu operatorul $e^{-j\beta}$.

I.3.4. Ecuațiile mașinii asincrone bifazate cu fazori spațiali

Ecuațiile tensiunilor

După cum s-a precizat anterior, cuplajul magnetic dintre rotor și stator depinde de unghiul θ_r care variază în timp (inductanțele sunt funcții de θ_r). Pentru a evita această dificultate, se vor scrie ecuațiile mașinii bifazate cu fazori spațiali, într-un plan complex comun $d - q$, care se rotește cu viteza ω_f față de axa fixă de referință, conform figurii 1.14. Fazorii spațiali corespunzători acestui plan complex comun vor primi indicele suplimentar f .

Plecând de la ecuațiile (1.32) scrise sub forma:

$$\begin{cases} u_{as} = R_s i_{as} + \frac{d}{dt} \psi_{as} \\ u_{bs} = R_s i_{bs} + \frac{d}{dt} \psi_{bs} \end{cases} \cdot j, \quad (1.76)$$

prin adunarea celor două relații membru cu membru și ținând cont de (1.68) și (1.69), rezultă:

$$\underline{u}_s = R_s \underline{i}_s + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_s. \quad (1.77)$$

Fig. 1.14. Modelul mașinii asincrone bifazate cu fazori spațiali.

În continuare va trebui să efectuăm schimbarea de axe ale fazorilor spațiali corespunzători tensiunii, curentului și fluxului statoric. Fazorii spațiali din relațiile (1.68) și (1.69) sunt raportați la un plan complex solidar cu statorul, deci fix în spațiu. Unghiul α_1 din figura 1.13 și relația (1.75) este zero. Dacă acești fazori se raportează la sistemul $d - q$, $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 = \theta_f$. Un fazor statoric raportat la sistemul $d - q$ devine:

$$\underline{y}_{fs} = \underline{y}_s e^{-j\theta_f}, \quad (1.78)$$

din care exprimând $\underline{y}_s$ pentru cele trei mărimi statorice se obține:

$$\begin{cases} \underline{u}_s = \underline{u}_{fs} e^{j\theta_f}; \\ \underline{i}_s = \underline{i}_{fs} e^{j\theta_f}; \\ \underline{\Psi}_s = \underline{\Psi}_{fs} e^{j\theta_f}. \end{cases} \quad (1.79)$$

Înlocuind aceste expresii în (1.77), se ajunge la forma:

$$\underline{u}_{fs} e^{j\theta_r} = R_s \underline{i}_{fs} e^{j\theta_r} + \frac{d}{dt} (\underline{\psi}_{fs} e^{j\theta_r}) = \left(R_s \underline{i}_{fs} + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_{fs} + j \underline{\psi}_{fs} \frac{d}{dt} \theta_r \right) e^{j\theta_r}, \quad (1.80)$$

dar $d(\theta_r)/dt = \omega_r$, viteza unghiulară a sistemului $d - q$. După simplificare cu $e^{j\theta_r}$:

$$\underline{u}_{fs} = R_s \underline{i}_{fs} + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_{fs} + j \omega_r \underline{\psi}_{fs}, \quad (1.81)$$

rezultă ecuația tensiunii statorice (1.81) cu fazori spațiali, în care ultimul termen a apărut datorită schimbării axelor.

Printr-o procedură similară celei descrise de relațiile (1.76), (1.77) se obține ecuația tensiunilor rotorice, plecând de la ecuația (1.32):

$$\underline{u}_r = R_r \underline{i}_r + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_r. \quad (1.82)$$

Pentru a raporta fazorii rotorici la planul complex comun $d - q$, se aplică relațiile (1.73), (1.74), (1.75) în care, conform figurii 1.13, $\alpha_1 = \theta_r$ (poziția rotorului), iar $\alpha_2 = \theta_f$ (poziția noului sistem de axe). Așadar, $\beta = \theta_f - \theta_r$, iar (1.78) devine pentru rotor:

$$\underline{y}_{fr} = \underline{y}_r e^{-j(\theta_f - \theta_r)}. \quad (1.83)$$

Exprimând $\underline{y}_{fr}$ pentru tensiunile, curenții și fluxurile rotorice, rezultă:

$$\begin{cases} \underline{u}_r = \underline{u}_{fr} e^{j(\theta_f - \theta_r)}; \\ \underline{i}_r = \underline{i}_{fr} e^{j(\theta_f - \theta_r)}; \\ \underline{\psi}_r = \underline{\psi}_{fr} e^{j(\theta_f - \theta_r)}. \end{cases} \quad (1.84)$$

Prin înlocuirea acestor expresii în (1.83), se obține:

$$\underline{u}_{fr} e^{j(\theta_f - \theta_r)} = R_r \underline{i}_{fr} e^{j(\theta_f - \theta_r)} + \frac{d}{dt} [\underline{\psi}_{fr} e^{j(\theta_f - \theta_r)}] = \left[R_r \underline{i}_{fr} + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_{fr} + j \underline{\psi}_{fr} \left(\frac{d}{dt} \theta_f - \frac{d}{dt} \theta_r \right) \right] e^{j(\theta_f - \theta_r)}. \quad (1.85)$$

După simplificarea cu $e^{j(\theta_f - \theta_r)}$ și știind că $\omega_r = d(\theta_r)/dt$, va rezulta:

$$\underline{u}_{fr} = R_r \underline{i}_{fr} + \frac{d}{dt} \underline{\psi}_{fr} + j (\omega_f - \omega_r) \underline{\psi}_{fr}, \quad (1.86)$$

unde ultimul termen apare datorită schimbării axelor.

Atât în ecuația (1.81) cât și în ecuația (1.86), ultimul termen indică sistemul de axe la care sunt raportați fazorii spațiali. În cazul statorului, fazorul fluxului este înmulțit cu viteza unghiulară relativă dintre sistemul de axe comun ($d - q$) și cel al mărimilor statorice (solidar cu statorul). În cazul rotorului, fazorul fluxului este înmulțit cu viteza unghiulară relativă dintre sistemul de axe comun și cel al mărimilor rotorice ($ar - br$) care se rotește cu viteza ω_r .

Curentul de magnetizare

Din relația generală (1.51) scrisă în complex rezultă:

$$\underline{i}_m = \underline{i}_{as} + \underline{i}_{bs} + \underline{i}_{ar} + \underline{i}_{br}, \quad (1.87)$$

și luând în considerare (1.68) și (1.69):

$$\underline{i}_m = \underline{i}_{as} + j \underline{i}_{bs} + \underline{i}_{ar} + j \underline{i}_{br}, \quad (1.88)$$

$$\underline{i}_m = \underline{i}_s + \underline{i}_r. \quad (1.89)$$

Dar cei doi curenți sunt în plane complexe diferite, din care cauză se va raporta fazorul corespunzător curentului rotoric la sistemul solidar cu statorul.

$$\underline{i}_m = \underline{i}_s + \underline{i}_r e^{j\theta_r}. \quad (1.90)$$

Prin aplicarea relației de transformare (1.74), se exprimă curentul de magnetizare în planul complex comun $d - q$:

$$\underline{i}_{fs} = \underline{i}_m e^{-j\theta_r} = \underline{i}_s e^{-j\theta_r} + \underline{i}_r e^{-j\theta_r} e^{j\theta_r}, \quad (1.91)$$

care conduce în final la:

$$\underline{i}_{fm} = \underline{i}_{fs} + \underline{i}_{fr}. \quad (1.92)$$

Observație. Din relațiile de definiție (1.68), (1.69) și (1.70) rezultă că un fazor spațial în planul complex comun $d - q$ va avea drept componente pe cele două axe, mărimile de fază corespunzătoare raportate la acest referențial:

$$\underline{i}_{fs} = \underline{i}_{ds} + j \underline{i}_{qs}; \quad \underline{i}_{fr} = \underline{i}_{dr} + j \underline{i}_{qr}. \quad (1.93)$$

Expresia curentului de magnetizare (1.92) se mai poate obține și din sistemul (1.53), dacă se înmulțește a doua ecuație cu j și apoi se adună cele două ecuații membru cu membru, aplicând în final (1.93).

Ecuatiile fluxurilor

Plecând de la (1.44) și (1.45), se poate scrie:

$$\begin{cases} \Psi_{as} = L_s i_{as} + L_m i_{ar} \cos \theta_r - L_m i_{br} \sin \theta_r ; \\ \Psi_{bs} = L_s i_{bs} + L_m i_{ar} \sin \theta_r + L_m i_{br} \cos \theta_r . \end{cases} \quad (1.94)$$

Se înmulțește a doua ecuație din sistem cu unitatea imaginară j și după efectuarea calculelor se ajunge la expresia fluxului statoric:

$$\underline{\Psi}_s = L_s \underline{i}_s + L_m \underline{i}_r e^{j\theta_r} . \quad (1.95)$$

Pentru deducerea expresiei fluxului rotoric se pleacă tot de la (1.44), aplicând (1.45):

$$\begin{cases} \Psi_{ar} = L_r i_{ar} + L_m i_{as} \cos \theta_r + L_m i_{bs} \sin \theta_r ; \\ \Psi_{br} = L_r i_{br} - L_m i_{as} \sin \theta_r + L_m i_{bs} \cos \theta_r . \end{cases} \quad (1.96)$$

Procedând analog ca în cazul fluxurilor statorice se ajunge la expresia:

$$\underline{\Psi}_r = L_r \underline{i}_r + L_m \underline{i}_s e^{-j\theta_r} . \quad (1.97)$$

Fluxul statoric și respectiv rotoric se vor raporta la referențialul comun prin procedeul deja cunoscut:

$$\underline{\Psi}_{fs} = \underline{\Psi}_s e^{-j\theta_f} = L_s \underline{i}_s e^{-j\theta_f} + L_m \underline{i}_r e^{j\theta_r} e^{-j\theta_f} ; \quad (1.98)$$

$$\underline{\Psi}_{fr} = \underline{\Psi}_r e^{-j(\theta_f - \theta_r)} = L_r \underline{i}_r e^{-j(\theta_f - \theta_r)} + L_m \underline{i}_s e^{-j\theta_f} e^{-j(\theta_f - \theta_r)} ,$$

pentru ca în final să se obțină:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{fs} &= L_s \underline{i}_{fs} + L_m \underline{i}_{fr} ; \\ \underline{\Psi}_{fr} &= L_r \underline{i}_{fr} + L_m \underline{i}_{fs} , \end{aligned} \quad (1.99)$$

sau în funcție de inductanțele de scăpări:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{fs} &= L_{\sigma s} \underline{i}_{fs} + L_m (\underline{i}_{fs} + \underline{i}_{fr}) ; \\ \underline{\Psi}_{fr} &= L_{\sigma r} \underline{i}_{fr} + L_m (\underline{i}_{fs} + \underline{i}_{fr}) . \end{aligned} \quad (1.100)$$

Dar $\underline{\Psi}_{fos} = L_{\sigma s} \underline{i}_{os}$ este fluxul de scăpări statoric, $\underline{\Psi}_{for} = L_{\sigma r} \underline{i}_{or}$ este fluxul de scăpări rotoric, iar $\underline{\Psi}_{fm} = L_m \underline{i}_{m}$ este fluxul de magnetizare, relația (1.100) se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{fs} &= \underline{\Psi}_{fos} + \underline{\Psi}_{fm} ; \\ \underline{\Psi}_{fr} &= \underline{\Psi}_{for} + \underline{\Psi}_{fm} . \end{aligned} \quad (1.101)$$

Relațiile (1.99) și (1.101) confirmă încă o dată și sub formă fazorială că modelul în referențialul comun $d - q$ prezintă avantajul unor coeficienți constanți în ecuațiile de funcționare ale mașinii, deoarece fluxurile exprimate în acest referențial nu mai depind de poziția rotorului (θ_r), ca în (1.95) și (1.97).

Utilizarea modelului cu fazori spațiali reduce numărul de ecuații care descriu funcționarea mașinii, fapt avantajos atât în cazul mașinii bifazate, cât mai ales în cazul mașinilor trifazate sau polifazate. Reprezentarea simbolică a mașinii folosind fazorii spațiali într-un referențial comun $d - q$ este prezentată în figura 1.15.

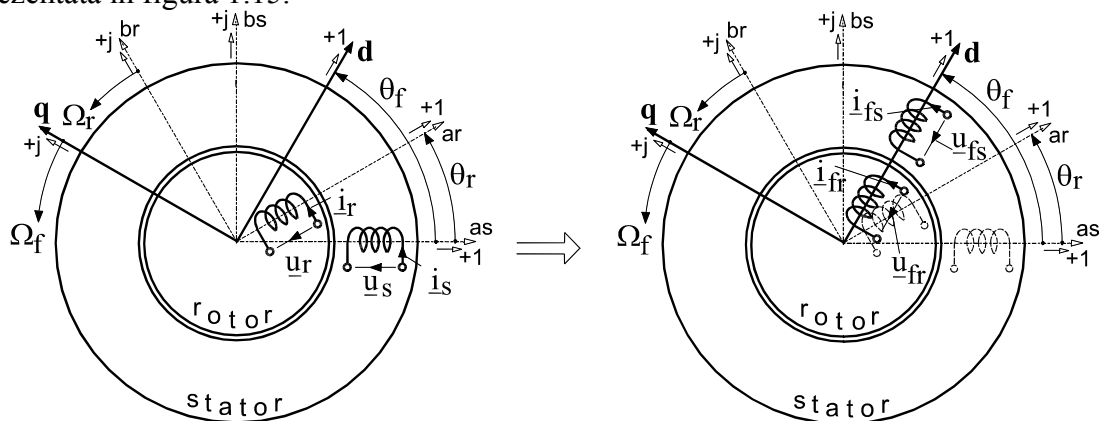


Fig. 1.15. Modelul mașinii asincrone cu fazori spațiali, într-un referențial comun $d - q$.

Efectul comun al tuturor fazelor statorice și respectiv rotorice este conținut în mărimile fazoriale ale înfășurării statorice și respectiv ale înfășurării rotorice, singurele prezente în referențialul comun.

Puterea electrică

Expresia puterii electrice instantanee (1.54) și relațiile de definiție (1.67) ... (1.69), permit scrierea puterii cu fazori spațiali:

$$p = \operatorname{Re} (\underline{u}_s \underline{i}_s^* + \underline{u}_r \underline{i}_r^*) , \quad (1.102)$$

în care $\underline{i}_{s,r}^*$ reprezintă valorile conjugate ale fazorilor $\underline{i}_{s,r}$. Prin operația de raportare la planul complex comun, puterea electrică instantanee va avea forma:

$$p = \operatorname{Re} (\underline{u}_{fs} \underline{i}_{fs}^* + \underline{u}_{fr} \underline{i}_{fr}^*) . \quad (1.103)$$

Cuplul electromagnetic

În expresia puterii electrice (1.103), se înlocuiesc tensiunile din relațiile (1.81) și (1.86). Se ține seama de expresiile fluxurilor (1.99) ... (1.101) și de:

$$\underline{i}_{fs} \underline{i}_{fs}^* = i_{fs}^2 ; \quad \underline{i}_{fr} \underline{i}_{fr}^* = i_{fr}^2 . \quad (1.104)$$

Se poate scrie pentru puterea electrică sub forma:

$$p = \operatorname{Re} (R_s i_{fs}^2 + R_r i_{fr}^2) + \operatorname{Re} \left(\underline{i}_{fs}^* \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{f\sigma\sigma} + \underline{i}_{fr}^* \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{f\sigma\sigma} + \underline{i}_{fm}^* \frac{d}{dt} \underline{\Psi}_{fm} \right) + \operatorname{Re} (-j \omega_f \underline{\Psi}_{fr} \underline{i}_{fr}^*) + \operatorname{Re} [j \omega_f (\underline{\Psi}_{fs} \underline{i}_{fs}^* + \underline{\Psi}_{fr} \underline{i}_{fr}^*)] , \quad (1.105)$$

în care primul termen reprezintă pierderile prin efect Joule-Lenz:

$$p_j = \operatorname{Re} (R_s i_{fs}^2 + R_r i_{fr}^2) , \quad (1.106)$$

al doilea termen reprezintă pierderile în fierul mașinii produse de variația fluxurilor:

$$p_{Fe} = \operatorname{Re} (\underline{i}_{fs}^*) , \quad (1.107)$$

al treilea termen este puterea mecanică a mașinii, care contribuie la realizarea cuplului:

$$p_m = \operatorname{Re} (-j \omega_f \underline{\Psi}_{fr} \underline{i}_{fr}^*) = \operatorname{Im} (\omega_f \underline{\Psi}_{fr} \underline{i}_{fr}^*) , \quad (1.108)$$

iar ultimul termen:

$$p_f = \operatorname{Re} [j \omega_f (\underline{\Psi}_{fs} \underline{i}_{fs}^* + \underline{\Psi}_{fr} \underline{i}_{fr}^*)] = 0 , \quad (1.109)$$

este zero, fiind pur imaginar.

Luând în considerare expresiile fluxurilor (1.99) ... (1.101), puterea mecanică se mai poate scrie sub formele:

$$p_m = \operatorname{Im} (\omega_r L_m \underline{i}_{fs} \underline{i}_{fr}^*) = \operatorname{Im} (\omega_r \underline{\Psi}_{fm}^* \underline{i}_{fs}) = \operatorname{Im} (\omega_r \underline{\Psi}_{fs}^* \underline{i}_{fm}) . \quad (1.110)$$

Dar puterea mecanică, pentru o mașină cu p perechi de poli, se mai poate scrie în funcție de cuplul electromagnetic:

$$p_m = M \frac{\omega_r}{p} . \quad (1.111)$$

Înlocuind în (1.111) expresiile puterii mecanice din (1.108) și (1.110), se obține cuplul electromagnetic instantaneu exprimat:

- în funcție de mărimile rotorice:

$$M = p \operatorname{Im} (\underline{\Psi}_{fr} \underline{i}_{fr}^*) ; \quad (1.112)$$

- în funcție de curenți:

$$M = p L_m \operatorname{Im} (\underline{i}_{fs} \underline{i}_{fr}^*) ; \quad (1.113)$$

- în funcție de mărimile statorice:

$$M = p \operatorname{Im} (\underline{\Psi}_{fs}^* \underline{i}_{fm}) ; \quad (1.114)$$

- în funcție de fluxul de magnetizare:

$$M = p \operatorname{Im} (\underline{\Psi}_{fm}^* \underline{i}_{fs}) ; \quad (1.115)$$

sau:

$$M = p \operatorname{Im} (\underline{\Psi}_{fm} \underline{i}_{fr}^*) . \quad (1.116)$$

Fiecare din formele cuplului: (1.112) ... (1.116), poate fi scrisă și sub formă de produs vectorial. De exemplu, relația (1.114) poate fi scrisă ca produs vectorial sub forma:

$$\overline{M} = p (\overline{\Psi}_{fs} \times \overline{i}_{fs}) , \quad (1.117)$$

unde modulul cuplului este:

$$M = p \Psi_s i_s \sin \beta , \quad (1.118)$$

β fiind unghiul dintre fazorii corespunzători fluxului și curentului, iar Ψ_s și i_s modulele fazorilor respectivi. Deoarece nici una din mărimile din (1.118) nu depinde de sistemul de axe, nu s-a mai folosit indicele f . Aceasta înseamnă că expresia scalară a cuplului nu depinde de sistemul de axe ales.

În cazul în care se alege un sistem de axe orientat după una din cele patru componente ale mărimilor care intervin, formele (1.112) ... (1.116) se vor reduce la un singur termen. Pentru o anumită formă a cuplului, există patru sisteme preferențiale de axe, în care expresia cuplului se simplifică. Acest lucru este valorificat în sistemele de reglare cu orientare după câmp.

Precizare. Și în cazul modelului cu fazori spațiali într-un referențial comun $d - q$ (figura 1.15), s-a preferat reprezentarea simbolică a celor două faze complexe ale mașinii. Aceste faze au fost reprezentate în axa reală d a planului complex unic $d - q$, pentru a sugera faptul că ecuațiile de funcționare se scriu într-un referențial comun. În realitate, cele două faze complexe (statorică și rotorică), urmăresc poziția celor doi fazori (statoric și rotor), care se modifică în timp față de axa fixă de referință, fazorii rămânând coliniari unul în raport cu celălalt.

Transformările aplicate modelului matematic al mașinii asincrone trifazate au avut ca scop final obținerea modelului cu fazori spațiali. Așa după cum se poate urmări sintetic în figura 1.16, s-a folosit ca etapă intermediară modelul bifazat al mașinii.

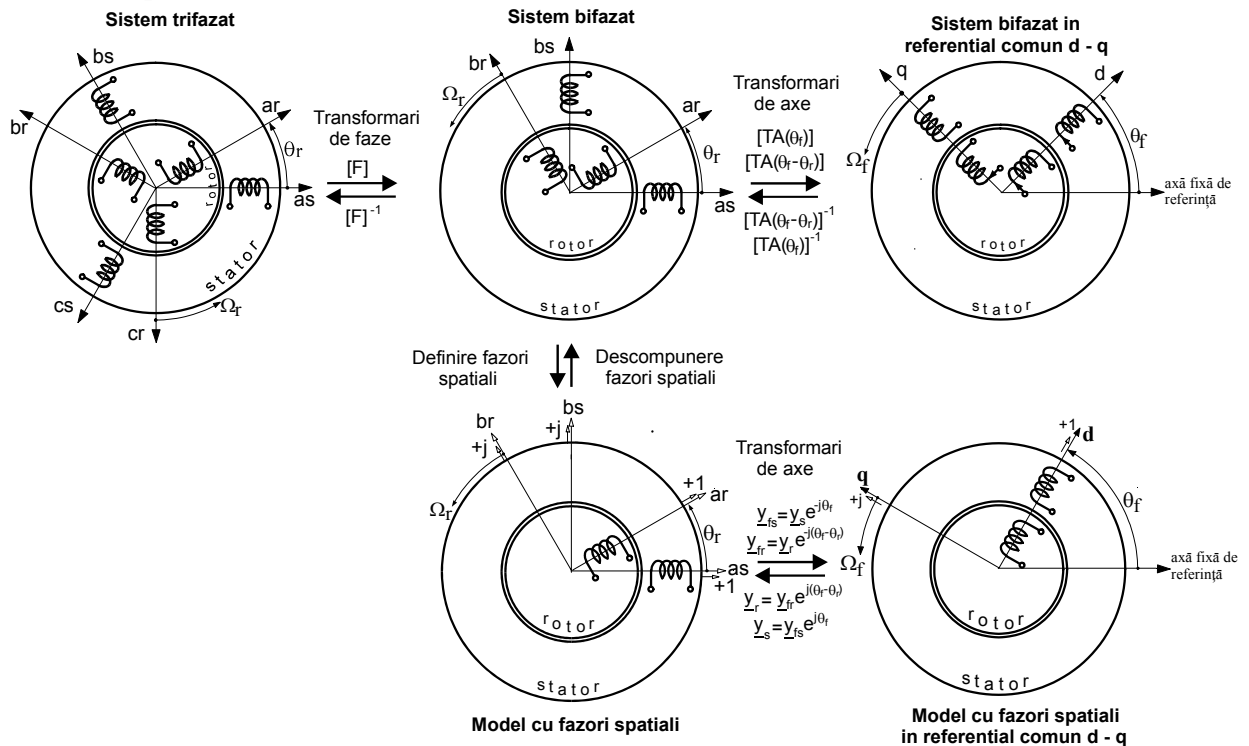


Fig. 1.16. Etapele parcurse pentru obținerea modelului mașinii asincrone trifazate cu fazori spațiali.

Folosirea modelului bifazat al mașinii asincrone trifazate ca etapă intermediară are motivații bine fundamentate. Un prim motiv, cu pronunțat caracter didactic, este acela al înțelegerii sensului fizic al transformărilor de faze și mai apoi a transformărilor de axe (de coordonate). Un alt motiv este acela al utilizării în multe aplicații a modelului bifazat al mașinii, model valabil atât pentru mașina trifazată, cât și pentru mașina bifazată și în anumite cazuri pentru mașina monofazată. Chiar dacă această cale este mai laborioasă prin multitudinea ecuațiilor prezentate, abordarea, înțelegerea și în cele din urmă utilizarea ei se dovedește a fi mai ilustrativă, intuitivă și accesibilă.

Din punct de vedere matematic, atât modelul bifazat, cât și modelul cu fazori spațiali într-un referențial comun $d - q$ reprezintă modele cu coeficienți constanți ale mașinii trifazate, inductanțele de cuplaj dintre rotor și stator nedepinzând de poziția variabilă în timp a rotorului. Avantajul evident al modelului cu fazori spațiali îl constituie faptul că pentru fiecare armătură (stator sau rotor), se scrie o singură ecuație fazorială în loc de două. Similitudinea celor două modele este clară dacă se observă că ecuațiile corespunzătoare componentelor fazorilor pe cele două axe (reală și imaginară) sunt la fel cu ecuațiile mărimilor de pe cele două axe ortogonale ale modelului bifazat.

Modelul cu fazori spațiali al mașinii asincrone trifazate se poate obține și direct, fără a trece prin faza intermediară a modelului bifazat în mărimi de fază. Pentru aceasta, se consideră efectul cumulat al solenațiilor celor trei înfășurări de fază (statorice respectiv rotorice). După cum s-a menționat anterior, solenațiile și fluxurile magnetice sunt proporționale cu curenții (de care diferă prin mărimi scalare: numărul de spire w și respectiv inductanța L), din care cauză efectul cumulat al solenațiilor sau fluxurilor magnetice corespunzătoare celor trei faze poate fi studiat prin efectul cumulat al celor trei curenți de fază care primesc caracter de vectori spațiali (subcapitolul I.3.1). Pentru înfășurările de fază statorice, principiul definirii fazorului spațial statoric este prezentat în figura 1.17.

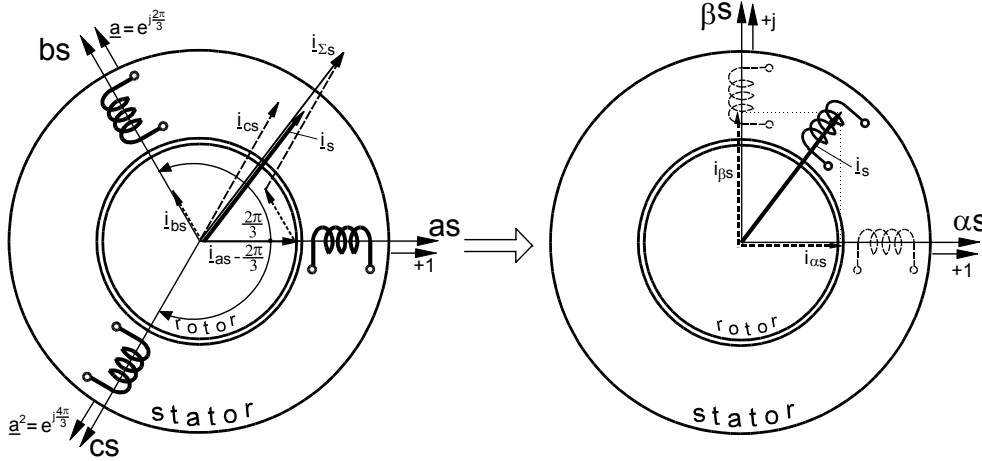


Fig. 1.17. Definirea fazorului spațial de curent pentru înfășurările statorice.

Unui curent ce parcurge o înfășurare oarecare de fază îi corespunde întotdeauna un vector spațial de direcție fixă, coliniară cu axa magnetică a acelei înfășurări, iar lungimea și sensul acelui vector sunt impuse de valoarea instantanee a curentului în momentul considerat. Dacă valorile instantanee ale curenților ce parcurg cele trei înfășurări de fază statorice sunt i_{as} , i_{bs} și i_{cs} , atunci vectorii spațiali corespunzători vor fi: $\underline{i}_{as}$, $\underline{i}_{bs}$ și $\underline{i}_{cs}$. În spațiu, direcția vectorilor $\underline{i}_{as}$, $\underline{i}_{bs}$ și $\underline{i}_{cs}$ este dată de poziția înfășurărilor statorice parcurse de acești curenți. La mașina de construcție obișnuită, cu simetrie cilindrică, toți vectorii spațiali sunt conținuți într-un plan perpendicular pe axa mașinii, având fiecare o direcție fixă. Valorile lor absolute (lungimile vectorilor) și sensurile lor variază în funcție de legea de variație în timp a curenților. Asupra acestei legi de variație nu se pune nici o restricție. Curenții de fază pot evolua în timp după orice lege (sinusoidal, aperiodic, cu valori constante în timp sau combinații ale acestora).

Faptul că vectorii curenților de fază au poziții bine determinate în spațiu, permite exprimarea acestora prin numere complexe. Considerând axa reală a sistemului de coordonate coliniară cu direcția axei magnetice a înfășurării as, vectorii spațiali corespunzători celor trei faze statorice vor avea forma:

$$\underline{i}_{as} = i_{as} ; \quad \underline{i}_{bs} = \underline{a} \cdot i_{bs} ; \quad \underline{i}_{cs} = \underline{a}^2 \cdot i_{cs} , \quad (1.119)$$

în care:

$$\underline{a} = e^{j(2\pi/3)} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} ; \quad \underline{a}^2 = e^{j(4\pi/3)} = e^{-j(2\pi/3)} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} , \quad (1.120)$$

poartă numele de *operator de rotație*.

Pentru a pune în evidență efectul rezultat al acțiunii cumulate a celor trei vectori de curent, trebuie să-i însumăm vectorial, conform figurii 1.17. Se va obține vectorul trifazat de curent statoric:

$$\underline{i}_{\Sigma s} = \underline{i}_{as} + \underline{i}_{bs} + \underline{i}_{cs} = i_{as} + \underline{a} \cdot i_{bs} + \underline{a}^2 \cdot i_{cs} . \quad (1.121)$$

În funcție de acest vector, se definește fazorul spațial de curent statoric:

$$\underline{i}_s = \frac{2}{3} (i_{as} + \underline{a} \cdot i_{bs} + \underline{a}^2 \cdot i_{cs}) . \quad (1.122)$$

Semnificația factorului de proporționalitate $2/3$ din relația de mai sus a fost explicată în subcapitolul (I.2.1).

Din relația de definire a fazorului spațial statoric (1.122), rezultă că dacă asupra evoluției în timp a celor trei curenți statorici i_{as} , i_{bs} și i_{cs} nu se pune nici o condiție, atunci valoarea și direcția în spațiu a fazorului spațial $\underline{i}_s$ vor fi determinate de modul de variație în timp a curenților din cele trei faze. Trebuie de menționat faptul că prin însumarea vectorilor spațiali ai celor trei curenți de fază se va obține un vector rezultat corect, numai dacă distribuția spațială a câmpului magnetic de-a lungul întrefierului este sinusoidală. Luându-se în considerare numai fundamentala câmpului magnetic, analiza proceselor de bază nu va fi afectată de erori.

Atât vectorul spațial, cât și fazorul spațial al unei înfășurări trifazate poate fi definit și pentru armonici de ordin superior, care apar datorită distribuției nesinusoidale a solenației de-a lungul întrefierului, datorită neregularităților întrefierului (existența creștăturilor și a dinților), datorită variației în timp nesinusoidale a curenților.

Relația (1.122) demonstrează faptul că cei trei curenți de fază se caracterizează printr-o singură mărime, fazorul spațial de curent. Acesta, conform figurii 1.17, se descompune în două componente, una reală și una imaginară:

$$\underline{i}_s = i_{as} + j \cdot i_{bs} \quad (1.123)$$

Tensiunile de fază instantanee fiind u_{as} , u_{bs} , și u_{cs} , se definește fazorul spațial al tensiunii statorice:

$$\underline{u}_s = \frac{2}{3} (u_{as} + \underline{a} \cdot u_{bs} + \underline{a}^2 \cdot u_{cs}) \quad (1.24)$$

În mod similar, valorile instantanee ale fluxurilor celor trei faze fiind Ψ_{as} , Ψ_{bs} , și Ψ_{cs} , fazorul spațial al fluxului va fi:

$$\underline{\Psi}_s = \frac{2}{3} (\Psi_{as} + \underline{a} \cdot \Psi_{bs} + \underline{a}^2 \cdot \Psi_{cs}) \quad (1.125)$$

Toate fenomenele referitoare la mărimile statorice, deci și la fazorii spațiali reprezentativi ai acestor mărimi, sunt valabile și pentru mărimile rotorice, pentru care se vor defini în mod analog fazorii spațiali corespunzători, după cum este ilustrat în figura de mai jos.

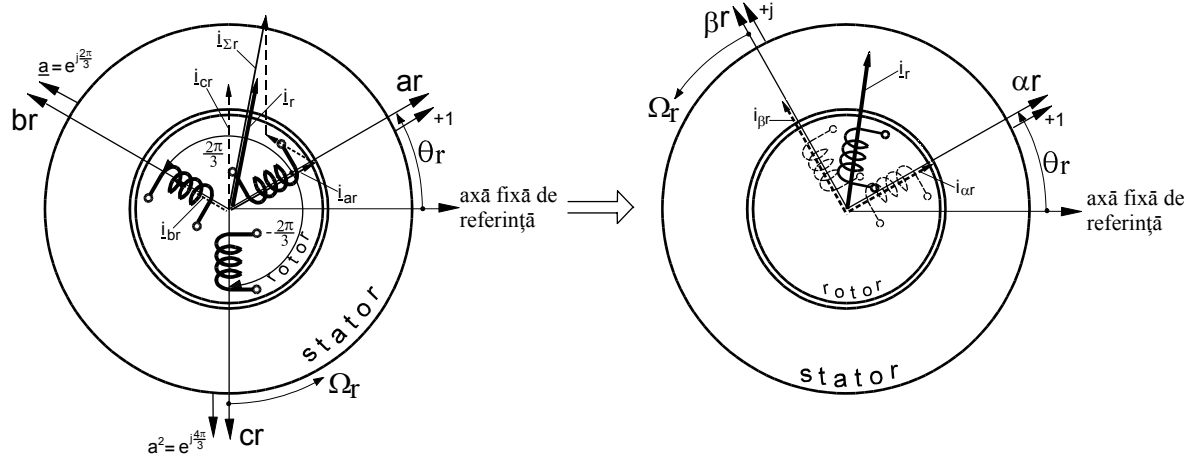


Fig. 1.18. Definirea fazorului spațial de curent pentru înfășurările rotorice.

Trebuie precizat faptul că sistemul de axe al planului complex, când este vorba de mărimile statorice, este solidar cu statorul, deci fix în spațiu. La definirea fazorilor spațiali ai mărimilor rotorice, se utilizează un plan complex a cărui axă reală este coliniară cu direcția axei de magnetizare a înfășurării fazei αr a rotorului. Cele două plane complexe sunt decalate cu unghiul θ_r , variabil în timp, deoarece rotorul se rotește cu viteza unghiulară Ω_r . Altfel spus, fazorii spațiali rotorici se rotesc față de fazorii spațiali statorici cu Ω_r .

Fazorul spațial al curentului rotoric în sistemul de coordonate solidar cu rotorul, va fi avea expresia:

$$\underline{i}_r = \frac{2}{3} (i_{ar} + \underline{a} \cdot i_{br} + \underline{a}^2 \cdot i_{cr}) \quad (1.126)$$

Fazorul spațial al curenților rotorici se descompune și el în două componente, una reală și una imaginară, conform figurii 1.18.

$$\underline{i}_r = i_{ar} + j \cdot i_{br} \quad (1.127)$$

Similar, se definește fazorul spațial al tensiunii rotorice:

$$\underline{u}_r = \frac{2}{3} (\underline{u}_{ar} + \underline{a} \cdot \underline{u}_{br} + \underline{a}^2 \cdot \underline{u}_{cr}), \quad (1.128)$$

precum și fazorul spațial al fluxului rotorice:

$$\underline{\Psi}_s = \frac{2}{3} (\underline{\Psi}_{as} + \underline{a} \cdot \underline{\Psi}_{bs} + \underline{a}^2 \cdot \underline{\Psi}_{cs}). \quad (1.129)$$

În general, dacă notăm cu m_a , m_b și m_c un sistem trifazat de mărimi (curenți, tensiuni, fluxuri) de fază într-o mașină asincronă trifazată, fazorul spațial corespunzător acestor mărimi va fi de forma:

$$\underline{m}_{s,r} = \frac{2}{3} (m_{as,r} + \underline{a} \cdot m_{bs,r} + \underline{a}^2 \cdot m_{cs,r}), \quad (1.130)$$

Prin descompunerea fazorului $\underline{m}$ după cele două axe ale planului complex (indicele după axa reală va fi α , iar după axa imaginară β), se obține:

$$\underline{m}_{s,r} = m_{\alpha s,r} + j \cdot m_{\beta s,r}. \quad (1.131)$$

Componenta homopolară va avea expresia:

$$m_{hs,r} = \frac{1}{3} (m_{as,r} + m_{bs,r} + m_{cs,r}). \quad (1.132)$$

La compunerea fazorului spațial, conform definiției, mărimea de fază m_a rămâne scalară (adică are numai componentă reală). Aceasta înseamnă că axa reală a planului complex (statoric sau rotorice), coincide cu direcția axei de magnetizare a înfășurării fazei a (statorice sau rotorice).

De remarcat este faptul că fazorul spațial prezintă o proprietate specifică. În cazul în care componenta homopolară este nulă, proiecțiile fazorului pe cele trei axe ale fazelor constituie chiar valorile instantanee ale mărimilor considerate în faza respectivă. Dacă există componentă homopolară, această proprietate se păstrează, cu precizarea că proiecțiile fazorului spațial pe cele trei axe ale fazelor vor fi egale cu valorile instantanee ale mărimilor considerate în cele trei faze, mai puțin componenta homopolară.

După definirea fazorilor spațiali conform celor arătate mai sus, modelul mașinii asincrone cu fazori spațiali va fi caracterizat prin fazori definiți în două plane complexe diferite sau altfel spus în două sisteme de referință diferite, care se rotesc unul față de celălalt cu viteza de rotație a rotorului. Pentru ca ecuațiile de funcționare ale mașinii să fie cu coeficienți constanți, este necesar ca fazorii spațiali ai ambelor armături (ai statorului și respectiv ai rotorului) să fie definiți într-un sistem de referință comun (un referențial comun $d - q$). Acest lucru se realizează prin transformări de axe ale fazorilor spațiali, după cum s-a arătat în subcapitolul (I.3.4) și ilustrat în figurile 1.15 și 1.15.

Deoarece componentele pe cele două axe (reală și imaginară) ale unui fazor spațial fac trimiteră imediată la mașina asincronă bifazată, în momentul obținerii modelului mașinii asincrone trifazate cu fazori spațiali, se obține implicit modelul și mașinii asincrone bifazate. Această remarcă permite punerea în evidență a modului de trecere inversă, de la modelul cu fazori spațiali la modelul cu mărimi de fază a mașinii trifazate. Este evident faptul că întoarcerea la modelul cu mărimi de fază al mașinii asincrone trifazate se face prin aplicarea transformărilor de faze inverse $[F]$ sau $[F]^{-1}$.

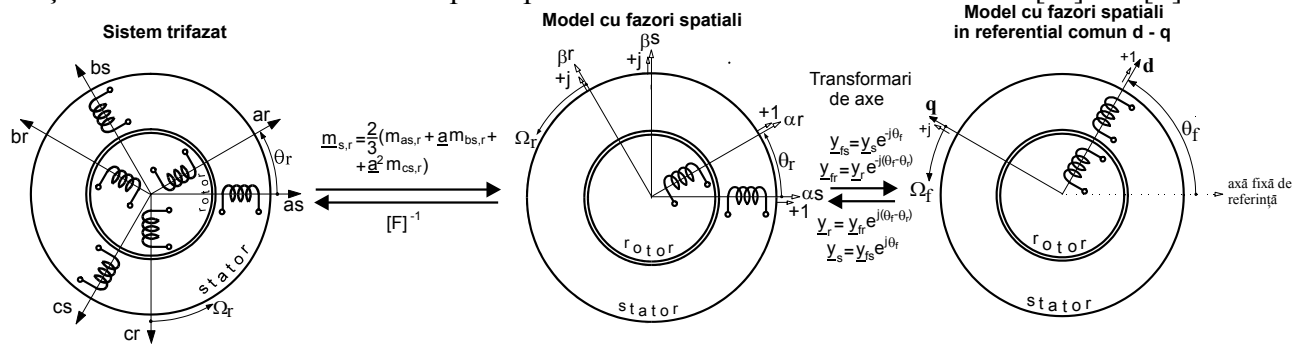


Fig. 1.19. Obținerea directă a modelului cu fazori spațiali a mașinii asincrone trifazate.

Etapele parcurse pentru a obține modelul cu fazori spațiali a mașinii asincrone trifazate fără a explicita modelul bifazat și modul de revenire la modelul mașinii asincrone cu mărimi de fază se pot urmări în figura 1.19.

Concluzii cu privire la fazorii spațiali

Modelul mașinii asincrone cu fazori spațiali permite studiul comportării mașinii folosind o singură ecuație vectorială pentru fiecare armătură (statorică și respectiv rotorică) în loc de trei ecuații, fazorii spațiali conținând atât mărimile de fază cât și componentele modelului bifazat, care pot fi obținute prin simpla proiectare a fazorilor pe axele de coordonate. Cu toate că reduce numărul de ecuații, modelul cu fazori spațiali descrie comportarea mașinii în orice regim de funcționare, indiferent de modul de evoluție în timp a mărimilor de intrare (tensiuni sau curenți).

Una dintre ipotezele pe care se bazează modelul cu fazori a mașinii asincrone este simetria spațială a înfășurărilor și distribuția sinusoidală a acestora, condiții satisfăcute cu o aproximație destul de bună de majoritatea mașinilor electrice. Dacă distribuția spațială a înfășurărilor se consideră a fi nesinusoidală (cum este în realitate), dacă se ține cont de existența creștăturilor și a dinților și dacă curenții care circulă prin înfășurări nu sunt sinusoidali, câmpul magnetic nu va mai avea o evoluție sinusoidală de-a lungul întrefierului. Forma câmpului se descompune în serie Fourier, iar fazorii spațiali pot fi definiți și pentru armonicile de ordin superior ale acestuia, similar cu cei definiți pentru fundamentală.

Avantajul fazorilor spațiali constă în aceea că permit modelarea nu numai a mașinilor electrice, ci a oricărui sistem trifazat de mărimi, cum ar fi transformatoarele, rețelele electrice, convertoarele statice de putere trifazate.

Fazorii spațiali constituie o metodă de studiu ce descrie ilustrativ comportarea mașinii, permițând o privire de ansamblu și o generalizare mai ușoară a fenomenelor și a metodelor de reglare a vitezei mașinilor electrice.